1D	2C	3B	4A	5D	6B	7C	8A	9B	10D
11B	12C	13A	14D	15B	16C	17A	18D	19B	20A
21C	22D	23B	24A	25C	26D	27B	28A	29C	30D
31B	32A	33C	34D	35A	36B	37C	38D	39A	40B
41D	42B	43A	44D	45B	46C	47A	48D	49C	50B

Câu 1. Chọn **D.**

Từ đồ thị, có $\frac{b}{d} = y(0) < 0$ và $d < 0$ suy ra $b > 0$.

Lại có $y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a-1} < 0$. Suy ra $a > 1$.

Đường tiệm cận ngang $y = \frac{a-1}{c-1} > 0$, nên $c > 1$.

Câu 2. Từ công thức

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 160\pi = \pi r^2.10 \Rightarrow r = 4.$$

$$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.4.10 = 80\pi.$$

Câu 3. Chọn **B.**

Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = (-5;3), \vec{v} = \overrightarrow{M'M''} = (7;4)$

Vậy $\vec{u} + \vec{v} = (2;7)$.

Câu 4. Chọn **A.**

Ta có $f(x) = 2^x(2^{-x} + 5) = 1 + 5.2^x$.

Suy ra nguyên hàm của $f(x)$ là $x + 5\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) + C$.

Câu 5. Chọn **D.**

Ta có PT hoành độ giao điểm

$$x^4 - 4x^2 - 3 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \ (1).$$

Đặt $t = x^2$ ta được PT $t^2 - 3t - 4 = 0$ (2)

Vì (2) có hai nghiệm phân biệt trái dấu nên (1) có hai nghiệm phân biệt. Vậy số giao điểm của hai đồ thị đã cho là 2.

Câu 6. Chọn **B.**

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì MN là đoạn vuông góc chung của chúng.

$$d(AB, CD) = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 7. Chọn **C.**

Vì $C \in d \Rightarrow C(5 + 3t; -1 - 2t)$.

Ta có: $CA^2 = (9 + 3t)^2 + (-3 - 2t)^2$

$$CB^2 = (3 + 3t)^2 + (-7 - 2t)^2.$$

Từ $CA = CB \Rightarrow t = -\frac{8}{5} \Rightarrow C\left(\frac{1}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

Câu 8. Chọn **A.**

Với $a = 3, b = 3, c = 1$: Ta có

$$a + \frac{\log_3 7 - b}{\log_3 2 + c} = 3 + \frac{\log_3 7 - 3}{\log_3 2 + 1} = \frac{3\log_3 2 + \log_3 7}{\log_3 2 + 1}$$

$$= \frac{\log_3 56}{\log_3 6} = \log_6 56.$$

Câu 9. Chọn **B.**

Câu 10. Chọn **D.**

Số gạch các hàng lần lượt từ trên xuống dưới tạo thành một cấp số cộng có $u_1 = 1$, công sai $d = 1$, $u_{500} = 500$.

Số gạch cần dùng để hoàn thành bức tường trên là

$$S_{500} = \frac{500}{2}(u_1 + u_{500}) = 125250.$$

Câu 11. Chọn **B.**

Ta có $x = 2$ và $x = 3$ là các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho vì PT $x^2 - 5x + 6 = 0$ có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 3$ và hai nghiệm này không là nghiệm của tử thức. Ngoài ra bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 tiệm cận.

Câu 12. Chọn **C.**

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (0;2;-1),\ \overrightarrow{AC} = (-1;1;2),\ \overrightarrow{AD} = (-3; m+2; n).$$

A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow 5(-3) + 1.(m+2) + 2.n = 0$$

$$\Leftrightarrow m + 2n = 13.$$

Câu 13. Chọn **A.**

Ta có $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = 1 - 4i$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+2i)(1+4i)}{1^2 + 4^2} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i.$$

Vậy phần ảo của số phức $\frac{z_1}{z_2}$ là $\frac{14}{17}$.

Câu 14. Chọn **D.**

Gọi x (đồng), y (đồng), z (đồng), theo thứ tự là giá tiền của đồng hồ, đôi giày và máy tính bỏ túi. Điều kiện: x, y, z dương. Theo đề bài, ta lập được hệ phương trình.

$$\begin{cases} x+y=420000 \\ x+z=570000 \\ y+z=750000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=870000 \\ x+y=420000 \\ x+z=570000 \\ y+z=750000 \end{cases}$$

$\Rightarrow x=120000, y=300000, z=450000.$

Câu 15. Chọn **B.**

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc ba liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $a>0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty.$

Ta thấy $g(0)>0$ và $g(1)<0$ nên PT $g(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $\mathbb{R}$. Khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y=|f(x)-2019|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Câu 16. Chọn **C.**

Kẻ $AH\perp SB\ (H\in SB)$.

Vì $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp (SAB)\Rightarrow BC\perp AH.$

Mà $AH\perp SB$ nên $AH\perp (SBC)$.

Do đó $d(A;(SBC))=AH=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}$

$$=\frac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 17. Chọn **A.**

BPT đã cho tương đương với

$(3+\sqrt{8})^{-2x}\ge(3+\sqrt{8})^{x^2}\Leftrightarrow -2x\ge x^2\Leftrightarrow x^2+2x\le 0$

$\Leftrightarrow -2\le x\le 0.$ Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-2;-1;0\}$.

Câu 18. Chọn **D.**

Ta có: $b(b^2-a^2)=c(c^2-a^2)$

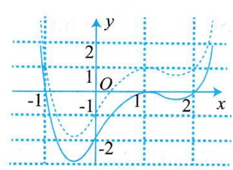
$\Leftrightarrow b^3-c^3=a^2(b-c)\Leftrightarrow b^2+bc+c^2=a^2$

$\Leftrightarrow b^2+bc+c^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow \cos A=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{A}=120^0.$

Câu 19. Chọn **B.**

Ta có $g'(x)=f'(x)-1$. Do đó đồ thị của hàm số $g'(x)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị của hàm số $f'(x)$ đi xuống 1 đơn vị.

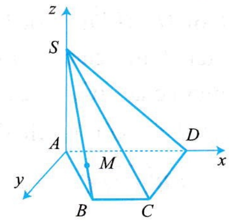


Quan sát đồ thị $g'(x)$, ta thấy $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua điểm $x=-1$.

Do đó $g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1\in(-2;\ 0)$.

Câu 20. Chọn **A.**

Đặt hình chóp vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $A(0;0;0)\equiv O$, $D(2a;0;0)$, $S(0;0;a\sqrt{3}), B\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.



Phương trình

$SB:\dfrac{2x}{a}=\dfrac{2y}{a\sqrt{3}}=\dfrac{z-a\sqrt{3}}{-a\sqrt{3}}.$

Gọi $M(x_0;y_0;z_0)\in SB\Rightarrow\begin{cases} y_0=\sqrt{3}x_0 \\ z_0=a\sqrt{3}-2\sqrt{3}x_0 \end{cases}.$

Mặt khác $AM\perp DM\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DM}=0\Rightarrow x_0=\dfrac{3a}{8}$

(loại nghiệm $x_0=\dfrac{a}{2}$ vì khi đó $M\equiv B$ và $AB\not\perp BD$). Khi đó $M\left(\dfrac{3a}{8};\dfrac{3a\sqrt{3}}{8};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Ta lại có $\overrightarrow{SM}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{SB}\Rightarrow\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{3}{4}.$

Câu 21. Chọn **C.**

Ta có $z(z-1)+i^2(z-7)=2\Leftrightarrow z^2-2z+5=0$

$\Leftrightarrow z=1-2i$ hoặc $z=1+2i$.

• $z=1-2i\ \Rightarrow\omega=\dfrac{1-i}{1+i}=-i\Rightarrow|\omega|=1.$

• $z=1+2i\ \Rightarrow\omega=\dfrac{1+3i}{1-3i}=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i\Rightarrow|\omega|=1.$

Vậy cả hai trường hợp thì $|\omega|=1$.

Câu 22. Chọn **D.**

Từ yêu cầu bài toán ta có

$$\begin{cases} m\ne 0 \\ \Delta'=-m+1>0 \\ S=\dfrac{2(m-1)}{m}>0 \\ P=\dfrac{m-1}{m}>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow m<0.$$

Câu 23. Chọn **B.**

$y'=3x^2+8(m-2)x-7=0$ luôn có hai nghiệm x_1,x_2 trái dấu. Khi đó x_1,x_2 là hai điểm cực trị của hàm số.

$|x_1|-|x_2|=-4\Leftrightarrow -x_1-x_2=-4\Leftrightarrow\dfrac{-8(m-2)}{3}=4\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}.$

Câu 24. Chọn **A.**

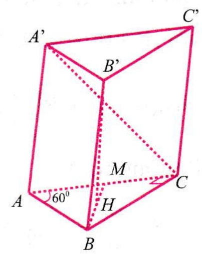
Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm $P(-1;-1),\forall m$.

Hạ $AH\perp\Delta\ (H\in\Delta)$. Khi đó $d(A;\Delta)=AH\le AP$

$\Rightarrow d_{\max}=AP=2\sqrt{10}$ và đường thẳng Δ trong trường hợp này có phương trình

$$3(x-5)+(y-1)=0\Leftrightarrow 3x+y-16=0.$$

Câu 25. Chọn **C.**



Gọi H, M lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và trung điểm của AC, từ giả thiết suy ra $B'H \perp (ABC)$. Khi đó

$$\widehat{(BB',(ABC))} = \widehat{B'BH} = 60^0.$$

Ta có

$$BH = BB'\cos 60^0 = a, B'H = \sqrt{BB'^2 - BH^2} = a\sqrt{3},$$

$$BM = \frac{3}{2}BH = \frac{3a}{2}.$$

Đặt $AC = x > 0$ thì $BC = AC\tan 60^0 = x\sqrt{3}$,

$AB = 2x, BM = \dfrac{x\sqrt{13}}{2}$. Từ đó có $x = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

$$V = \frac{1}{3}B'H.S_{ABC} = \frac{1}{6}B'H.AC.BC = \frac{9a^3}{26}.$$

Câu 26. Chọn **D.**

Không gian mẫu $C_{12}^5 = 792$.

Gọi A là biến cố cần tìm xác suất; B là biến cố chọn được hội đồng gồm 3 thầy, 2 cô trong đó có thầy *Xuân* nhưng không có cô *Hạ*; C là biến cố chọn được hội đồng gồm 3 thầy, 2 cô trong đó có cô *Hạ* nhưng không có thầy *Xuân*.

Xác suất để sao cho hội đồng có 3 thầy, 2 cô và nhất thiết phải có thầy *Xuân* hoặc cô *Hạ* nhưng không có cả hai là

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$$

$$= \frac{1.C_6^2.C_4^2}{C_{12}^5} + \frac{1.C_6^3.C_4^1}{C_{12}^5} = \frac{170}{792} = \frac{85}{396}.$$

Câu 27. Chọn **B.**

Đặt lên tấm bìa hình dạng tam giác vuông là ABC, $AB = c$ và $AC = b$. Khối sinh ra gồm hai khối nón:

• Khối nón 1 có đỉnh B, đường cao BH và bán kính đáy bằng AH.

• Khối nón 2 có đỉnh C, đường cao CH và bán kính đáy bằng AH.

Vậy thể tích của khối tròn xoay là:

$$V = \frac{1}{3}\pi AH^2(BH + CH) = \frac{1}{3}\pi AH^2.BC$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{AB.AC}{BC}\right)^2.BC = \frac{1}{3}\pi\frac{AB^2.AC^2}{BC} = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Câu 28. Chọn **A.**

Ta có $f(x) = x\sum_{k=0}^{5} C_5^k.(-1)^k.x^k + x^2\sum_{i=0}^{10} C_{10}^i.(2x)^i$

hay $f(x) = \sum_{k=0}^{5} C_5^k.(-1)^k.x^{k+1} + \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i.2^i.x^{i+2}.$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển ứng với $k = 4$ và $i = 3$ là $C_5^4 + 8C_{10}^3 = 965.$

Câu 29. Chọn **C.**

Gọi $M(x_M; y_M; 0), N(x_N; 0; z_N), P(0; y_P; z_P)$.

Vì M là trung điểm của AN nên

$M\left(\dfrac{9+x_N}{2}; -\dfrac{3}{2}; \dfrac{4+z_N}{2}\right)$. Do $z_M = 0 \Rightarrow z_N = -4$.

Lại có N là trung điểm của MP nên

$N\left(\dfrac{x_M}{2}; \dfrac{2y_P - 3}{4}; \dfrac{z_P}{2}\right)$. Do $\begin{cases} y_N = 0 \\ z_N = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_P = \dfrac{3}{2} \\ z_P = -8 \end{cases}$.

Từ $\begin{cases} x_M = \dfrac{9+x_N}{2} \\ x_N = \dfrac{x_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 6 \\ x_N = 3 \end{cases}$. Khi đó $N(3; 0; -4)$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 9 = 2(3-9) \\ y_B + 3 = 2(0+3) \\ z_B - 4 = 2(-4-4) \end{cases}$

$$\Rightarrow B(-3; 3; -12) \Rightarrow ab + bc + ca = -9.$$

Câu 30. Chọn **D.**

Giả sử $M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Đặt $L = MF_1.MF_2 + OM^2$

$$= \left(a + \frac{c}{a}x\right)\left(a - \frac{c}{a}x\right) + x^2 + y^2$$

$$= a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 + x^2 + y^2$$

$$= a^2 + \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2$$

$$= a^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2 + b^2.$$

Câu 31. Chọn **B.**

Sử dụng công thức $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a, \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$

biến đổi PT đã cho về $\cos 2x(\cos 2x + 2) = 0$.

Giải PT trên ta được nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Các nghiệm $x \in (0; 2\pi)$ là $x \in \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

Vậy tổng các nghiệm của PT là $S = 4\pi$.

Câu 32. Chọn **A.**

Ta có:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-bx}}{x}=B+C$$

Mà $B=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x\left(\sqrt[3]{(ax+1)^2}+\sqrt[3]{ax+1}+1\right)}=\frac{a}{3}$

và $C=\lim_{x\to 0}\frac{bx}{x(1+\sqrt{1-bx})}=\frac{b}{2}$.

Theo giả thiết có $\begin{cases}\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=2\\ a+3b=9\end{cases}\Leftrightarrow a=3,b=2.$

Dựa vào các phương án A, B, C, D ta chọn A.

Câu 33. Chọn **C.**

HPT đã cho tương đương với $\begin{cases}x+y=a\\ xy=a^2-3\end{cases}$.

HPT có nghiệm khi $S^2\geq 4P\Leftrightarrow a^2\geq 4(a^2-3)$

$$\Leftrightarrow a^2\leq 4\Leftrightarrow -2\leq a\leq 2.$$

Ta có $F=a^2+2a-3=(a+1)^2-4\geq -4$.

Vậy F đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=-1$ hay $(x=1,y=-2)$ hoặc $(x=-2,y=1)$.

Câu 34. Chọn **D.**

d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(1;-2;3)$ và đi qua điểm $N(-3;1;-4)$; (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 khi mặt phẳng đó đi qua trung điểm $I(-1;-1;-1)$ của MN và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(-4;-5;-2)$.

PT $(P):-4(x+1)-5(y+1)-2(z+1)=0$

$$\Leftrightarrow 4x+5y+2z+11=0.$$

Suy ra $a+2b+3c=4+2.5+3.2=20$.

Câu 35. Chọn **A.**

ĐK: $n\geq 3,n\in\mathbb{N}^*$.

Từ $\frac{2}{C_n^2}+\frac{14}{3C_n^3}=\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{2.2}{n(n-1)}+\frac{14.2}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow n^2-7n-18=0\Rightarrow n=9.$$

Với $n=9$ ta có:

$$\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k\,2^{9-k}.(-3)^k.x^{18-3k}.$$

Từ yêu cầu bài toán $\Rightarrow 18-3k=6\Leftrightarrow k=4$.

Vậy số hạng cần tìm là: $2^5.3^4.C_9^4=326592$.

Câu 36. Chọn **B.**

Biến đổi E và thu gọn lại ta được

$$E=\frac{9}{8}+\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{2c}+\frac{c}{2a}\right)+\left(\frac{b}{4a}+\frac{c}{4b}+\frac{a}{4c}\right)$$

Ta có: $E\geq\frac{9}{8}+3\sqrt[3]{\frac{a}{2b}\cdot\frac{b}{2c}\cdot\frac{c}{2a}}+3\sqrt[3]{\frac{b}{4a}\cdot\frac{c}{4b}\cdot\frac{a}{4c}}=\frac{27}{8}$.

Vậy $\min E=\frac{27}{8}\in\left(3;\frac{7}{2}\right)\Leftrightarrow a=b=c.$

Câu 37. Chọn **C.**

BPT đã cho tương đương với

$\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)x\geq\frac{(a+b+c)^2}{abc}\Leftrightarrow(a+b+c)x\geq(a+b+c)^2.$ (1)

Với $a+b+c>0$ thì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow x\geq a+b+c$.

Với $a+b+c<0$ thì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow x\leq a+b+c$.

Với $a+b+c=0$ thì (1) có tập nghiệm $S=\mathbb{R}$.

Câu 38. Chọn **D.**

$M\in d\Rightarrow M(-1+2t;\ t;\ 2+t)$. Vì A là trung điểm của đoạn MN nên $N(5-2t;-2-t;4-t)$;

$N\in(P)\Rightarrow 5-2t-2-t-2(4-t)+8=0\Rightarrow t=3$.

$\Rightarrow M(5;3;5),N(-1;-5;1)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(-6;-8;-4)$.

PT đường thẳng $\Delta:\frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-5}{2}$.

Câu 39. Chọn **A.**

PT hoành độ giao điểm $\frac{x}{1-x}=x-m$

$$\Leftrightarrow g(x)=x^2-mx+m=0\quad(x\neq 1).$$

Điều kiện để đồ thị hàm số cắt đường thẳng tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1 và x_2 là $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>4\end{array}\right.$ (*)

Gọi $A(x_1;x_1-m),B(x_2;x_2-m)$ là các giao điểm của chúng. Từ giả thiết ta có:

$$\cos 60^0=\left|\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\right|=\frac{|x_1x_2+(x_1-m)(x_2-m)|}{\sqrt{x_1^2+(x_1-m)^2}\sqrt{x_2^2+(x_2-m)^2}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\left|2x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2\right|}{\sqrt{2g(x_1)+m^2-2m}\sqrt{2g(x_2)+m^2-2m}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{\left|2m-m^2+m^2\right|}{\sqrt{m^2-2m}\sqrt{m^2-2m}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=6\end{array}\right.(\text{do}(*)).$$

Câu 40. Chọn **B.**

Gọi a,R lần lượt là cạnh của hình vuông, bán kính đáy của hình trụ. Mảnh đất hình vuông có diện tích bằng $81m^2$ nên $a^2=81\Rightarrow a=9$ (m).

Khi đó $2x+2R=a\Leftrightarrow R=\frac{9-2x}{2}>0$.

Thể tích của khối trụ $V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{9-2x}{2}\right)^2 x$

$$= \frac{\pi}{4}(81x - 36x^2 + 4x^3).$$

Xét hàm số $f(x) = 81x - 36x^2 + 4x^3$ trên $\left(0;\frac{9}{2}\right)$.

Ta có $f'(x) = 81 - 72x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{9}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, có

$$\max_{x\in\left(0;\frac{9}{2}\right)} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 54.$$

Vậy thể tích lớn nhất V của ao mà ông An cần đào là

$$\frac{\pi}{4}.54 = 13,5\pi\ (m^3).$$

Câu 41. Chọn **D.**

$(P) /\!/ (Q) \Rightarrow (P): x - 2y + z + m = 0\ (m \neq -5)$

Mặt cầu có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R = \sqrt{15}$.

Đường tròn giao tuyến có bán kính $r = 3$.

$$d(I;(P)) = \sqrt{15-9} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|1-2+m|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$\Leftrightarrow m = 7$ hoặc $m = -5$ (loại).

Câu 42. Chọn **B.**

BPT tương đương với $f(x) = (a+1)x + 4a - 3 > 0$.

Để $a(x+4) > 3 - x, \forall x \in [-2;1] \Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5 > 0 \\ 5a - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{5}{2}.$$

Mà $a < 6$ và $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \{3;4;5\}$.

Câu 43. Chọn **A.**

Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Rightarrow M\left(-\frac{19}{2};\ 2;\ \frac{15}{2}\right)$. Khi đó

$$\left|\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}\right| = \left|2\overrightarrow{IM}\right| = 2\left|\overrightarrow{IM}\right|.$$

Biểu thức đã cho nhỏ nhất $\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{IM}\right|$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow I$ là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oxz)

$$\Leftrightarrow I\left(-\frac{19}{2};\ 0;\ \frac{15}{2}\right).$$

Câu 44. Chọn **D**

Câu 45. Chọn **B**

Ta có $\int_{-1}^{1} f(-x)dx + 2019\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} 2^x dx.$

Đặt $t = -x \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(-x)dx = \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$

Do đó ta có

$$2020\int_{-1}^{1} f(x)dx = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_{-1}^{1} \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{3}{4040\ln 2}.$$

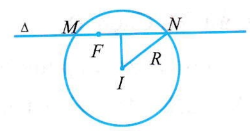
Câu 46. Chọn **C.**

Đường tròn (γ) có tâm $I(0;\ 1)$, bán kính $R = 2$.

PT tiếp tuyến Δ là

$$y = y'(1)(x-1) + y(1) = (4-4m)(x-1) + 1 - m.$$

Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm cố định $F\left(\frac{3}{4};0\right)$ và điểm F nằm trong đường tròn (γ).



Giả sử Δ cắt (γ) tại M và N. MN nhỏ nhất

$\Leftrightarrow d(I;\Delta) = IF$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{IF} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{16} \Rightarrow a + b = 13 + 16 = 29,$$

trong đó $\overrightarrow{IF} = \left(\frac{3}{4};-1\right)$ và $\vec{u} = (1;4-4m)$ là một VTCP của Δ.

Câu 47. Chọn **A.**

Ta có:

$4 = 4^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^{2x}.2^y} \Leftrightarrow 4 \geq 2^{2x+y} \Leftrightarrow 2x + y \leq 2.$

$P = 2\left[(2x)^3 + y^3\right] + 16x^2y^2 + 20xy$

$= 2(2x+y)[(2x+y)^2 - 6xy] + 16x^2y^2 + 20xy$

$\leq 4(4 - 6xy) + 16x^2y^2 + 20xy$

$\Rightarrow P \leq 16 + 2(2xy)^2 + 4xy(2xy - 1)$ (*).

Mà $2xy \leq \left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 \leq 1$ nên (*) $\Rightarrow P \leq 18.$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$ và $y = 1$.

Vậy GTLN của P bằng 18.

Câu 48. Chọn **D.**

Ta có $6=\int_1^{e^6}\frac{f(\ln\sqrt{x})}{x}dx=2\int_1^{e^6}f(\ln\sqrt{x})d(\ln x)$

$\Rightarrow 6=2\int_0^3 f(x)dx\Rightarrow\int_0^3 f(x)dx=3.$

$2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos^2x)\sin 2xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos^2x)d(\cos^2x)\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=2.$

$\int_1^3(f(x)+2)dx=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx+2x\Big|_1^3=3-2+4=5.$

Câu 49. Chọn **C.**

Đặt $u=\log_3(x-3)$, PT đã cho trở thành

$$(m-1)u^2+(m-5)u+m-1=0.\quad (*)$$

PT đã cho có nghiệm trên $\left[\frac{10}{3};6\right]\Leftrightarrow$ PT (*) có nghiệm trên $[-1;1]\Leftrightarrow m=\frac{u^2+5u+1}{u^2+u+1}$ có nghiệm trên $[-1;1]$.

Xét hàm số $f(u)=\frac{u^2+5u+1}{u^2+u+1}$ trên đoạn $[-1;1]$, từ đó tìm GTNN, GTLN của $f(u)$ trên đoạn $[-1;1]$ lần lượt là $-3,\frac{7}{3}\cdot$ Từ ycbt cho ta $-3\le m\le\frac{7}{3}$ và $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m để PT có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{10}{3};6\right]$.

Câu 50. Chọn **B.**

Ta có $|z_1|=1\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+2)^2=1.$

Đặt $\begin{cases}x-2=\cos t\\ y+2=\sin t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$. Khi đó

$|z_2|=\sqrt{(2+\cos t)^2+(-2+\sin t)^2}$

$=\sqrt{9+4(\cos t-\sin t)}=\sqrt{9+4\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$

$\le\sqrt{9+4\sqrt{2}}.$

Do đó z_2 có mô đun lớn nhất khi

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow t=\frac{7\pi}{4}\in[0;2\pi]$$

$$z_2=2+\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i.$$

Vậy phần ảo của số phức cần tìm là $-\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)