PHẠM TRỌNG THƯ

TOÁN NÂNG CAO
LƯỢNG GIÁC

PHẦN BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

BỒI DƯỠNG HỌC SINH KHÁ GIỎI LỚP 10, 11

Lời nói đầu

Biến đổi lượng giác và hàm số lượng giác các em được học ở lớp 10 và lớp 11. Đó là lý thuyết nền tảng cho học sinh bước đầu làm quen môn Lượng giác và tiến xa hơn nữa làm tiền đề để giải phương trình, bất phương trình lượng giác, hệ thức lượng trong tam giác ... nói chung những bài toán liên quan đến lượng giác.

Sách được chia làm hai phần
Phần I : TỰ LUẬN
Biên soạn theo nội dung

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

B. VÍ DỤ MINH HỌA CÁC CHỦ ĐỀ

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN CÁC CHỦ ĐỀ

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Phần II: TRẮC NGHIỆM
Gồm 120 câu trắc nghiệm có hướng dẫn và đáp án.

Dù đã rất nhiều cố gắng nhưng cũng không thể tránh khỏi thiếu sót, rất mong quý độc giả góp ý để những lần tái bản sách sau được hoàn chỉnh. Tác giả chân thành cảm ơn.

PHẠM TRỌNG THƯ

MỘT SỐ KÍ HIỆU DÙNG TRONG SÁCH	
đpcm	Điều phải chứng minh
VT	Vế trái
VP	Vế phải
$\Rightarrow$	Suy ra
$\Leftrightarrow$	Tương đương
$\varnothing$	Tập hợp rỗng
$\mathbf{N}^*$	$\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbf{Z}$	Tập hợp các số nguyên $\mathbf{Z} = \{... -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
$\mathbf{Z}^+$	Tập hợp các số nguyên dương
$\mathbf{R}$	Tập hợp các số thực

PHẦN I TỰ LUẬN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đơn vị đo góc và cung tròn, độ dài của cung tròn

a) Độ: Ta đã biết một đơn vị đo góc là độ

- Góc bẹt có số đo là 180^0
- $1^0 = 60'$; $1' = 60''$
- Cung tròn bán kính R có số đo a^0 ($0 \le a \le 360$) thì có độ dài $\frac{\pi a}{180} \cdot R$.

b) Rađian (Viết tắt là rad): Đây cũng là một đơn vị được sử dụng nhiều trong toán học, khoa học kỹ thuật ...

- Người ta xem $180^0 = \pi$ rad
- *Côngthức:*

+ Đổi từ độ sang rađian : $a^0 = \frac{\pi . a}{180}$ rad .

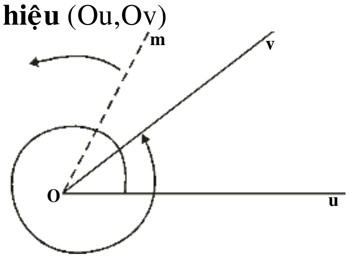
+ Đổi từ rađian sang độ : $\alpha \text{ rad} = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^0$.

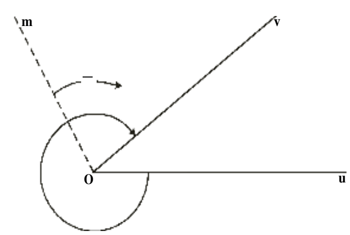
2. Góc và cung lượng giác

a) Khái niệm góc lượng giác và số đo của chúng

* Cho hai tia Ou, Ov. Một tia Om quay quanh O luôn luôn theo chiều dương (hay luôn luôn theo chiều âm) xuất phát từ tia đầu Ou đến trùng với tia cuối Ov thì ta nói tia Om quét một **góc lượng giác** có tia đầu Ou, tia cuối Ov.

Ký hiệu (Ou,Ov)





Chú ý

- **Quy ước** chọn chiều dương ngược chiều kim đồng hồ, chiều âm cùng chiều kim đồng hồ.
- Với hai tia Ou, Ov thì có vô số góc lượng giác có tia đầu Ou, tia cuối Ov.

* Khi tia Om quét một góc lượng giác mà nó quay góc a^0 (hay α rad) thì ta

nói góc lượng giác đó có số đo a^0 (hay α rad).

Do đó:

Nếu một góc lượng giác có số đo a^0 (hay α rad) thì với mọi góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với nó có số đo $a^0 + k.360^0$, $k \in \mathbf{Z}$ (hay $\alpha + k2\pi$ rad), mỗi góc ứng với một giá trị của k .

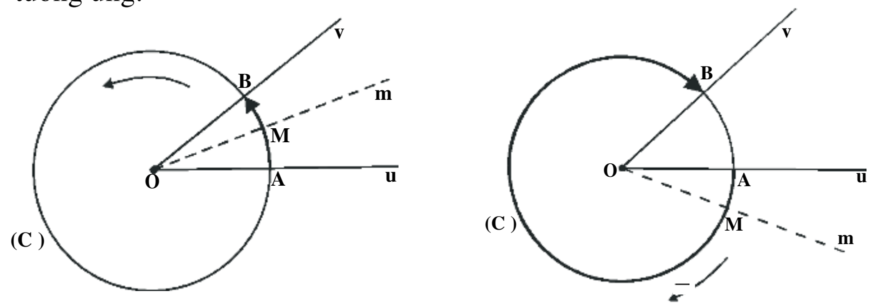
b) Khái niệm cung lượng giác và số đo của chúng

- Gọi $Ou \cap (C) = A, Ov \cap (C) = B$, khi tia Om quét nên góc lượng giác (Ou,Ov) thì điểm M chạy trên (C) theo một chiều từ điểm A đến điểm B. Ta nói điểm M chuyển động trên đường tròn định hướng vạch nên một **cung lượng giác** mút đầu A, mút cuối B, tương ứng với góc lượng giác (Ou, Ov).

-Vậy hai điểm A, B trên đường tròn định hướng xác định vô số cung lượng giác mút đầu A, mút cuối B.

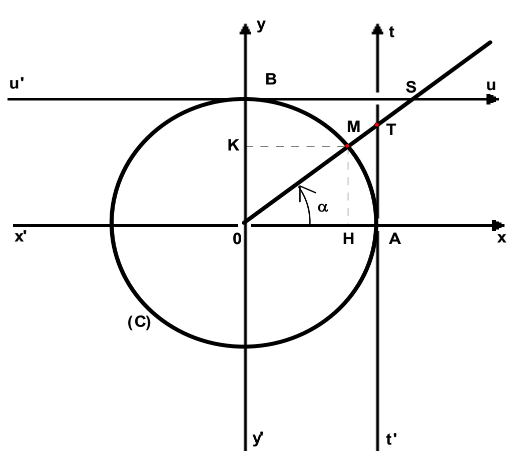
Kí hiệu: $\overset{\frown}{AB}$

- Số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) chính là số đo của cung lượng giác tương ứng.



3. Định nghĩa giá trị lượng giác của một cung

Trong hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho đường tròn lượng giác (C) tâm O, điểm gốc A(1; 0)(đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng có bán kính bằng 1 và trên đó chọn một điểm làm gốc).



Nếu lấy $M(x_M; y_M) \in (C)$ để $(OA, OM) = \alpha$ thì ta có:

- $\cos\alpha = \overline{OH} = x_M$
- $\sin\alpha = \overline{OK} = y_M$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \overline{AT}$ (với $\cos\alpha \neq 0$)
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \overline{BS}$ (với $\sin\alpha \neq 0$)

$\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ là các **giá trị lượng giác** của góc α

+ Trục $x'Ox$ gọi là trục côsin, trục $y'Oy$ gọi là trục sin.

+ Trục $t't$ gọi là trục tang, trục $u'u$ gọi là trục côtang.

Chú ý

- $\tan\alpha$ còn kí hiệu là $tg\alpha$, $\cot\alpha$ còn kí hiệu là $cotg\alpha$.
- $-1 \leq \sin\alpha \leq 1, \forall\alpha$; $-1 \leq \cos\alpha \leq 1, \forall\alpha$.
- $\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

4. Dấu của các giá trị lượng giác

Giá trị lượng giác	Cung phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–

5. Giá trị lượng giác của một số góc (cung) đặc biệt

α	$0\,(0^0)$	$\frac{\pi}{6}(30^0)$	$\frac{\pi}{4}(45^0)$	$\frac{\pi}{3}(60^0)$	$\frac{\pi}{2}(90^0)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$
$\cot\alpha$	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

6. Hệ thức cơ bản

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right)$.
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z})$.
- $\tan\alpha\cot\alpha = 1\ \left(\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right)$.
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\ \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right)$.
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\ (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z})$.

7. Góc (Cung) liên kết

Cung đối	**Cung bù**
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$
Cung phụ	**Cung hơn kém $\dfrac{\pi}{2}$**
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$
$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$
Cung hơn kém π	
$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

Chú ý

- $\sin(\alpha + k\pi) = \sin\alpha, k \in \mathbf{Z}$, k chẵn ; $\sin(\alpha + k\pi) = -\sin\alpha, k \in \mathbf{Z}$, k lẻ

  $\sin(\alpha + k\pi) = (-1)^k \sin\alpha, k \in \mathbf{Z}$.
- $\cos(\alpha + k\pi) = \cos\alpha, k \in \mathbf{Z}$, k chẵn ; $\cos(\alpha + k\pi) = -\cos\alpha, k \in \mathbf{Z}$, k lẻ

$\cos(\alpha + k\pi) = (-1)^k \cos\alpha,\ k \in \mathbf{Z}.$

- $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha,\ k \in \mathbf{Z}.$
- $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha,\ k \in \mathbf{Z}.$

8. Công thức cộng

- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$
- $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}.$

$\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \alpha \pm \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right)$

9. Công thức nhân đôi

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ $\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right)$

Công thức hạ bậc

- $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ • $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

Chú ý: • $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha.$

• $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha.$

Công thức tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ theo $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$ $(\alpha \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z})$

- $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$
- $\cos\alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$
- $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1 - t^2}\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right)$

10. Công thức biến đổi tổng thành tích

- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right)$
- $\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right)\cdot$

11. Công thức biến đổi tích thành tổng

- $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$
- $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$
- $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

12. Tính chẵn lẻ của hàm số y = f(x)

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathbf{D}$

- f(x) gọi là hàm số chẵn nếu $\begin{cases} \forall x \in \mathbf{D} \Rightarrow -x \in \mathbf{D} \\ f(-x) = f(x). \end{cases}$
- f(x) gọi là hàm số lẻ nếu $\begin{cases} \forall x \in \mathbf{D} \Rightarrow -x \in \mathbf{D} \\ f(-x) = -f(x). \end{cases}$

13. Hàm số tuần hoàn

Hàm số $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ là hàm số tuần hoàn có số $T \neq 0$ sao cho :

$\forall x \in \mathbf{D}, x + T \in \mathbf{D}, x - T \in \mathbf{D}$ và $f(x+T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thoả mãn điều kiện đó, là chu kì của hàm số f.

14. Các hàm số lượng giác

a) Hàm số y=sinx

- Có tập xác định $\mathbf{R}$;
- Là hàm số lẻ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π;

Chú ý : Tổng quát hàm $y = \sin(ax+b)$ có chu kì $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$ $(a \neq 0)$.

- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi ; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\,;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbf{Z}$;

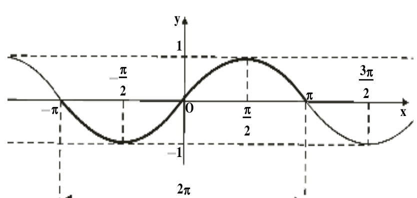
- Lấy mọi giá trị tùy ý thuộc đoạn $[-1;1]$;
- Có đồ thị là một hình sin (ở hình 1).

b) Hàm số y = cosx

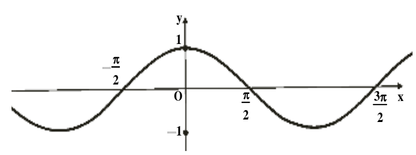
- Có tập xác định $\mathbf{R}$;
- Là hàm số chẵn;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π;

Chú ý : Tổng quát hàm $y=\cos(ax+b)$ có chu kì $T=\frac{2\pi}{|a|}$ ($a\neq 0$).

- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left((2k-1)\pi\,;2k\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(2k\pi\,;(2k+1)\pi\right), k\in\mathbf{Z}$;
- Lấy mọi giá trị tùy ý thuộc đoạn $[-1;1]$;
- Có đồ thị là một hình sin (ở hình 2).



Hình 1



Hình 2

c) Hàm số y = tanx

- Có tập xác định $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$;
- Là hàm số lẻ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π;

Chú ý : Tổng quát hàm $y=\tan(ax+b)$ có chu kì $T=\frac{\pi}{|a|}$ ($a\neq 0$).

- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbf{Z}$;
- Lấy mọi giá trị thực tùy ý;
- Có đồ thị nhận các đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$ làm các đường tiệm cận

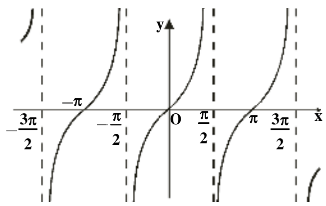
đứng (ở hình 3).

d) Hàm số y = cotx

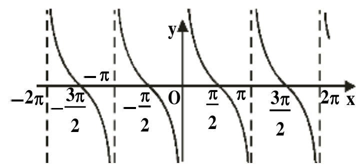
- Có tập xác định $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$;
- Là hàm số lẻ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π;

Chú ý : Tổng quát hàm $y = \cot(ax + b)$ có chu kì $T = \frac{\pi}{|a|}$ ($a \neq 0$).

- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi ; (k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$;
- Lấy mọi giá trị thực tùy ý;
- Có đồ thị nhận các đường thẳng $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ làm các đường tiệm cận đứng (ở hình 4).



Hình 3



Hình 4

15. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP CẦN LƯU Ý

Dạng 1 : Tính giá trị của biểu thức

Phương pháp :

+ Ta cần cố gắng phân tích biểu thức cần tính :

- Theo các hàm số lượng giác mà giả thiết đã cho biết giá trị.
- Theo các hàm số lượng giác của các góc (cung) đặc biệt.

+ Đôi khi ta sử dụng cách giải đặc biệt là dựa vào một phương trình lượng giác có liên quan đến bài toán.

Dạng 2 : Chứng minh một đẳng thức lượng giác dạng A = B (giả sử đẳng thức cần chứng minh đã có nghĩa)

Phương pháp : Ta dùng một trong các phương pháp

- Biến đổi A thành B hoặc B thành A (thông thường đây là phương pháp biến đổi phía phức tạp nhất).
- Biến đổi $A = C$ và $B = C$.
- Biến đổi $A = B \Leftrightarrow A_1 = B_1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_n = B_n$ (đúng).
- Biến đổi $A = B \Leftrightarrow A - B = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{B} = 1\,(B \neq 0)$.

Dạng 3 : Chứng minh biểu thức f(x) không phụ thuộc biến số x

Phương pháp : Ta dùng một trong các phương pháp

- Biến đổi biểu thức f(x) không có mặt x.
- Chứng minh $f'(x) = 0$.

Dạng 4 : Chứng minh, rút gọn bằng cách sử dụng tổng số hữu hạn hay tích hữu hạn

Phương pháp :

• Tìm $\mathbf{S} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ta thực hiện như sau :

Phân tích

$$a_1 = u_1 - u_2 \qquad (1)$$

$$a_2 = u_2 - u_3 \qquad (2)$$

$$\ldots$$

$$a_n = u_n - u_{n+1} \qquad (n)$$

Cộng (1), (2),...(n) vế theo vế, ta được : $\mathbf{S} = u_1 - u_{n+1}$.

Phương pháp :

• Tìm $\mathbf{P} = a_1.a_2...a_n$ ta thực hiện như sau :

Phân tích

$$a_1 = \frac{u_1}{u_2} \qquad (1)$$

$$a_2 = \frac{u_2}{u_3} \qquad (2)$$

$$\ldots$$

$$a_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} \qquad (n)$$

Nhân (1), (2),...(n) vế theo vế, ta được : $\mathbf{P} = \frac{u_1}{u_{n+1}}$.

Dạng 5 : Chứng minh đẳng thức lượng giác có liên hệ với các góc của tam giác ABC

Phương pháp : Cần học nhớ các công thức biến đổi lượng giác, sử dụng $A + B + C = \pi$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA CÁC CHỦ ĐỀ

CHỦ ĐỀ 1 : KHÁI NIỆM GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC, DẤU CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC- TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Ví dụ 1.

a) Đổi $\frac{5\pi}{4}$ rad ra độ

b) Đổi $\frac{11\pi}{6}$ rad ra độ

c) Đổi 72^0 ra rađian

d) Đổi $108^0; 12^0 30'$ ra rađian.

Giải

a) $\frac{5\pi}{4}\text{ rad} = \left(\frac{180\cdot\frac{5\pi}{4}}{\pi}\right)^0 = 225^0.$

b) $\frac{11\pi}{6}\text{ rad} = \left(\frac{180\cdot\frac{11\pi}{6}}{\pi}\right)^0 = 330^0.$

c) $72^0 = \frac{\pi.72}{180}\text{ rad} = \frac{2\pi}{5}\text{ rad}.$

d) $108^0 = \frac{\pi.108}{180}\text{ rad} = \frac{3\pi}{5}\text{ rad};\quad 12^0 30' = 12{,}5^0 = \frac{\pi\cdot 12{,}5}{180}\text{ rad} = \frac{5\pi}{72}\text{ rad}.$

Ví dụ 2. Hãy viết số đo của góc $(Ou, Ov) = \frac{7\pi}{4} + 3\pi$ dưới dạng $\alpha + k2\pi$ với $0 \le \alpha < 2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Giải

Ta có : $sđ(Ou, Ov) = \frac{3\pi}{4} + \pi + 3\pi = \frac{3\pi}{4} + 4\pi$ với $\alpha = \frac{3\pi}{4}, k = 2.$

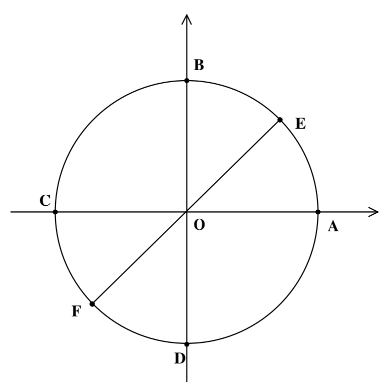
Ví dụ 3. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo :

a) $(Ou, Ov) = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

b) $(Ou, Ov) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Giải

a) Biểu diễn các điểm ngọn của $(Ou, Ov) = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ có 4 điểm phân biệt ứng:



- $k = 0 : sđ(Ou, Ov) = 0 \Rightarrow$ điểm A.
- $k = 1 : sđ(Ou, Ov) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ điểm B.
- $k = 2 : sđ(Ou, Ov) = \pi \Rightarrow$ điểm C.
- $k = 3 : sđ(Ou, Ov) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ điểm D.

Ta thấy $\begin{cases} k \ge 4 \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$ hay $\begin{cases} k < 0 \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$ có các điểm ngọn trùng với 4 điểm trên.

b) Biểu diễn các điểm ngọn của $(Ou, Ov) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ có 2 điểm phân biệt ứng:

- $k = 0 : sđ(Ou, Ov) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ điểm E.
- $k = 1 : sđ(Ou, Ov) = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow$ điểm F.

Ta nhận thấy 2 điểm này đối xứng nhau qua gốc toạ độ O và ta cũng nhận thấy rằng $\begin{cases} k \geq 2 \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$ hay $\begin{cases} k < 0 \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$ có các điểm ngọn trùng với 2 điểm trên.

Nhận xét :

Nếu sđ $(Ou, Ov) = \alpha + \frac{k2\pi}{n}$ hay sđ$(Ou, Ov) = a^0 + \frac{k360^0}{n}, k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^*$ thì sẽ có n điểm ngọn trên đường tròn lượng giác.

Ví dụ 4. Xác định dấu của

a) $\cos 136^0$

b) $\sin \frac{5\pi}{4}$

c) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\cot\frac{2\pi}{5}$

d) $\cos(45^0 - \alpha)$ với $0^0 < \alpha < 90^0$.

Giải

a) Vì $90^0 < 136^0 < 180^0 \Rightarrow \cos 136^0 < 0$.

b) Vì $\pi < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{4} < 0$.

c) Ta có : $\begin{cases} \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) < 0 \quad \left(\text{Vì } -\pi < -\frac{2\pi}{3} < -\frac{\pi}{2}\right) \\ \cot\frac{2\pi}{5} > 0 \quad \left(\text{Vì } 0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\cot\frac{2\pi}{5} < 0.$

d) Vì $0^0 < \alpha < 90^0 \Rightarrow -90^0 < -\alpha < 0^0 \Rightarrow -45^0 < 45^0 - \alpha < 45^0$

$\Rightarrow \cos(45^0 - \alpha) > 0$.

Ví dụ 5. Tính giá trị các biểu thức :

a) $A = 3\sin 30^0 - \cos 60^0 - 2\cot 90^0$

b) $B = \cos^2\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{6} - 3\tan^2\frac{\pi}{4} + 2$

c) $C = \dfrac{3\cos^2 0 - 4\sin^2\frac{\pi}{2}}{3\cot\frac{\pi}{4} + 5\sin\pi - \tan\frac{\pi}{4}}$

d) $D = \left(3\cot^2\frac{\pi}{2} - \tan^2\frac{\pi}{12}\cot^2\frac{\pi}{12}\right)^3$.

Giải

a) $A = 3\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2.0 = 1.$

b) $B = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2} - 3.1^2 + 2 = -\frac{7}{4}\cdot$

c) $C = \frac{3.1^2 - 4.1^2}{3.1 + 5.0 - 1} = -\frac{1}{2}\cdot$

d) $D = \left(3.0^2 - 1^2\right)^3 = -1.$

CHỦ ĐỀ 2 : HỆ THỨC CƠ BẢN

Ví dụ 6. Tính cosα, sinα, cotα biết $\tan\alpha = -2$ và $90^0 < \alpha < 180^0$.

Giải

• Tính cosα : $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (do $90^0 < \alpha < 180^0$).

• Tính sinα : $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = (-2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot$

• Tính cotα : $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{2}\cdot$

Ví dụ 7. Cho $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

a) Tính $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$

b) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1 + \cot\alpha}{1 - \cot\alpha}\cdot$

Giải

a) • Tính cosα : $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{5}$

$\left(\text{do } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)\cdot$

• Tính tanα; cotα : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$; $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{3}{4}\cdot$

b) $A = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 7.$

Ví dụ 8. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$

b) $B = (1 - \cos^2 x)\tan^2 x + 1 - \tan^2 x$

c) $C = \sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$

Giải

a) $A = \dfrac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x)}{\sin x - \cos x} = 1 + \sin x\cos x.$

b) $B = \tan^2 x - \cos^2 x\tan^2 x + 1 - \tan^2 x = 1 - \cos^2 x \cdot \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= 1 - \sin^2 x = \cos^2 x.$

c) Vì $\begin{cases} 1+\sin\alpha > 0 \\ 1-\sin\alpha > 0 \end{cases}$ nên $C = \dfrac{1+\sin\alpha - 1 + \sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \dfrac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = -2\tan\alpha$

$\left(\text{do } \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos\alpha < 0\right)\cdot$

Ví dụ 9. Chứng minh :

a) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x.\sin^2 x$

b) $\sin^8 x + \cos^8 x = 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^4 x\cos^4 x$

c) $\dfrac{\sin^4 x - \cos^2 x + 2\cos^4 x - \cos^6 x}{\cos^4 x - \sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^6 x} = \tan^6 x.$

Giải

a) $VT = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \dfrac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x\sin^2 x$ (đpcm)

b) Đặt $a = \sin^2 x$ và $b = \cos^2 x \Rightarrow a + b = 1$

$VT = a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = [(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2$

$= (1-2ab)^2 - 2a^2b^2 = 1 - 4ab + 4a^2b^2 - 2a^2b^2 = 1 - 4ab + 2a^2b^2$

$= 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^4 x\cos^4 x$ (đpcm).

c) $VT = \dfrac{\sin^4 x - \cos^2 x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)}{\cos^4 x - \sin^2 x(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)} = \dfrac{\sin^4 x - \cos^2 x(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x - \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2}$

$= \dfrac{\sin^4 x - \cos^2 x\sin^4 x}{\cos^4 x - \sin^2 x\cos^4 x} = \dfrac{\sin^4 x(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x(1-\sin^2 x)} = \dfrac{\sin^4 x\sin^2 x}{\cos^4 x\cos^2 x}$

$= \dfrac{\sin^6 x}{\cos^6 x} = \tan^6 x$ (đpcm).

Ví dụ 10. Chứng minh rằng $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

Giải

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}\Leftrightarrow(1-\cos x)(1+\cos x)=\sin x\sin x\Leftrightarrow 1-\cos^2x=\sin^2x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2x+\cos^2x=1\ (\text{đúng})$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 11. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x

a) $A=(\cot x-\tan x)^2-(\cot x+\tan x)^2$

b) $B=2(\sin^4x+\cos^4x+\sin^2x\cos^2x)^2-(\sin^8x+\cos^8x)$.

Giải

a) $A=\cot^2x-2\cot x\tan x+\tan^2x-(\cot^2x+2\cot x\tan x+\tan^2x)$

$=-4\tan x\cot x=-4$ (đpcm).

b) *Cách1*

Đặt $\begin{cases}u=\sin^2x\\ v=\cos^2x\end{cases}\Rightarrow u+v=1.$

Ta có: $B=2(u^2+v^2+uv)^2-(u^4+v^4)$

$=2[(u+v)^2-2uv+uv]^2-[(u^2+v^2)^2-2u^2v^2]$

$=2(1-uv)^2-\{[(u+v)^2-2uv]^2-2u^2v^2\}$

$=2(1-2uv+u^2v^2)-(1-2uv)^2+2u^2v^2$

$=2(1-2uv+u^2v^2)-(1-4uv+4u^2v^2)+2u^2v^2$

$=2-4uv+2u^2v^2-1+4uv-4u^2v^2+2u^2v^2=1$ (đpcm).

Cách2

Đặt $\begin{cases}u=\sin^4x+\cos^4x\\ v=\sin^2x\cos^2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2=\sin^8x+\cos^8x+2\sin^4x\cos^4x\\ v^2=\sin^4x\cos^4x.\end{cases}$

Ta có: $B=2(u+v)^2-(u^2-2v^2)=2(u^2+2uv+v^2)-u^2+2v^2$

$=2u^2+4uv+2v^2-u^2+2v^2=u^2+4uv+4v^2=(u+2v)^2$

$=(\sin^4x+\cos^4x+2\sin^2x\cos^2x)^2$

$=[(\sin^2x+\cos^2x)^2]^2=1$ (đpcm).

Ví dụ 12. Chứng minh rằng nếu $a\neq b, a\neq 1$ và

$$\begin{cases}a\sin^2\alpha+b\cos^2\alpha=1 & (1)\\ a\cos^2\beta+b\sin^2\beta=1 & (2)\\ a\tan\alpha=b\tan\beta & (3)\end{cases}\quad \text{thì } a+b=2ab.$$

Giải

• Nếu $a = 0 \Rightarrow b \neq 0$, từ (3) $\Rightarrow \sin\beta = 0$, từ (2) $\Rightarrow a = 1$ (vô lý).

$(1) \Rightarrow a\tan^2\alpha + b = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha \Leftrightarrow (a-1)\tan^2\alpha = 1 - b$

$(2) \Rightarrow a + b\tan^2\beta = \dfrac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \tan^2\beta \Leftrightarrow (b-1)\tan^2\beta = 1 - a$

Do đó: $\dfrac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta} = \left(\dfrac{1-b}{1-a}\right)^2$ (vì $a \neq 1$)(4); $\dfrac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta} = \dfrac{b^2}{a^2}$ (theo giả thiết) (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \left(\dfrac{1-b}{1-a}\right)^2 = \dfrac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \dfrac{1-2b+b^2}{1-2a+a^2} = \dfrac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow a^2 - 2a^2b + a^2b^2 = b^2 - 2b^2a + a^2b^2$

$\Rightarrow (a-b)(a+b) - 2ab(a-b) = 0 \Rightarrow a + b = 2ab$ (do $a \neq b$) (đpcm).

CHỦ ĐỀ 3 : GÓC (CUNG) LIÊN KẾT

Ví dụ 13. Tính các giá trị sau :

a) $\cos 150^0$ **b)** $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ **c)** $\sin(-765^0)$

d) $\tan 330^0$ **e)** $\cot\dfrac{11\pi}{4}$ **f)** $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Giải

a) $\cos 150^0 = \cos(180^0 - 30^0) = -\cos 30^0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

b) $\cos\dfrac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}\cdot$

c) $\sin(-765^0) = -\sin 765^0 = -\sin(45^0 + 2.360^0) = -\sin 45^0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

d) $\tan 330^0 = \tan(360^0 - 30^0) = \tan(-30^0) = -\tan 30^0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot$

e) $\cot\dfrac{11\pi}{4} = \cot\left(3\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\cot\dfrac{\pi}{4} = -1.$

f) $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = \tan\left(-\dfrac{5\pi}{3} + 2\pi\right) = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$

Ví dụ 14. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \cos(\pi + x) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \tan(2\pi - x) + \cot\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$

b) $B = \cos(180^0 - \alpha) + \sin(\alpha - 270^0) - 3\tan(90^0 + \alpha)\cot(270^0 - \alpha).$

Giải

a) $A = -\cos x - \cos x + \tan(-x) + \cot\left(\pi + \dfrac{\pi}{2} - x\right) = -2\cos x - \tan x + \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$= -2\cos x - \tan x + \tan x = -2\cos x.$

b) $B = -\cos\alpha + \sin(\alpha + 90^0 - 360^0) - 3(-\cot\alpha)\cot(180^0 + 90^0 - \alpha)$

$= -\cos\alpha + \sin(\alpha + 90^0) + 3\cot\alpha\cot(90^0 - \alpha)$

$= -\cos\alpha + \cos\alpha + 3\cot\alpha\tan\alpha = 3.1 = 3.$

Ví dụ 15. Rút gọn:

a) $A = \tan 1^0 \tan 2^0 \tan 3^0 ... \tan 87^0 \tan 88^0 \tan 89^0$

b) $B = \cos 735^0 \cos(-15^0) + \cos 75^0 \sin(-555^0) + \tan 155^0 \tan 245^0.$

Giải

a) Ta có: $\tan 89^0 = \cot 1^0; \tan 88^0 = \cot 2^0$

$\tan 87^0 = \cot 3^0; ....$

$\tan 46^0 = \cot 44^0; \tan 45^0 = 1$

Nên $A = (\tan 1^0 \tan 89^0).(\tan 2^0 \tan 88^0)...(\tan 44^0 \tan 46^0)\tan 45^0$

$= (\tan 1^0 \cot 1^0).(\tan 2^0 \cot 2^0)...(\tan 44^0 \cot 44^0)\tan 45^0$

$= 1.1...1 = 1.$

b)

- $\cos 735^0 = \cos(15^0 + 2.360^0) = \cos 15^0$
- $\cos(-15^0) = \cos 15^0$
- $\cos 75^0 = \cos(90^0 - 15^0) = \sin 15^0$
- $\sin(-555^0) = -\sin 555^0 = -\sin(360^0 + 195^0) = -\sin 195^0$

  $= -\sin(180^0 + 15^0) = \sin 15^0$
- $\tan 155^0 = \tan(180^0 - 25^0) = -\tan 25^0$
- $\tan 245^0 = \tan(180^0 + 65^0) = \tan 65^0 = \cot 25^0$

Do đó: $B = \cos^2 15^0 + \sin^2 15^0 - \tan 25^0 \cot 25^0 = 1 - 1 = 0.$

Ví dụ 16. Chứng minh trong tam giác ABC, ta có:

a) $\sin(A + B) = \sin C$

b) $\cos(A + B) = -\cos C$

c) $\sin\left(\dfrac{A + B}{2}\right) = \cos\dfrac{C}{2}$

d) $\cos\left(\dfrac{A + B}{2}\right) = \sin\dfrac{C}{2}$

e) $\sin(A + B - C) = \sin 2C$

f) $\cos\left(\dfrac{A + B + 3C}{2}\right) = -\sin C.$

Giải

Vì A, B, C là ba góc của ΔABC nên $A+B+C=\pi \Rightarrow A+B=\pi-C$

a) $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$.

b) $\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$.

c) $\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi-C}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\cos\dfrac{C}{2}\cdot$

d) $\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi-C}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\sin\dfrac{C}{2}\cdot$

e) $\sin(A+B-C)=\sin(\pi-2C)=\sin 2C$.

f) $\cos\left(\dfrac{A+B+3C}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi+2C}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+C\right)=-\sin C$.

Chú ý : Ta sử dụng Ví dụ 16a, b, c, d như công thức.

CHỦ ĐỀ 4 : HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Ví dụ 17. Tìm tập xác định của hàm số sau :

a) $y=2\cos\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ **b)** $y=\tan 3x$ **c)** $y=\cot\dfrac{x}{2}$

d) $y=\sqrt{2-\sin x}$ **e)** $y=\dfrac{1-\cos x}{2\sin x}$ **f)** $y=\dfrac{2\cos x}{\sin(x-2)}\cdot$

Giải

a) Hàm số y xác định khi $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

b) Hàm số y xác định khi $3x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

c) Hàm số y xác định khi $\dfrac{x}{2}\neq k\pi, k\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow x\neq k2\pi, k\in\mathbf{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{k2\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

d) Vì $\sin x\leq 1<2 \Rightarrow 2-\sin x>0, \forall x$ nên tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{R}$

e) Hàm số y xác định khi $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

f) Hàm số y xác định khi $\sin(x-2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2+k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{2+k\pi, k\in\mathbf{Z}\}\cdot$

Ví dụ 18. Xét tính chẵn , lẻ của các hàm số sau :

a) $f(x)=-2\cos x$ **b)** $g(x)=5\sin x-2$

c) $h(x)=2\cos^2 x\sin x+3\tan x$ **d)** $k(x)=\tan|x|$

e) $u(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **f)** $p(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Giải

a) Tập xác định của f(x) là $\mathbf{D} = \mathbf{R}$.

Ta có: $\begin{cases} \forall x \in \mathbf{D} \Rightarrow -x \in \mathbf{D} \\ f(-x) = -2\cos(-x) = -2\cos x = f(x) \end{cases} \Rightarrow$ f(x) là hàm số chẵn.

b) Tập xác định của g(x) là $\mathbf{D} = \mathbf{R}$.

Với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có: $g(-x) = 5\sin(-x) - 2 = -5\sin x - 2$

Suy ra: $g(-x) \neq g(x)$ và $g(-x) \neq -g(x)$.

Vậy hàm số g(x) không chẵn, không lẻ.

c) Tập xác định của h(x) là $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Ta có: $\begin{cases} \forall x \in \mathbf{D} \Rightarrow -x \in \mathbf{D} \\ h(-x) = 2\cos^2(-x)\sin(-x) + 3\tan(-x) = -(2\cos^2 x\sin x + 3\tan x) = -h(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ h(x) là hàm số lẻ.

d) Tập xác định của k(x) là $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Ta có: $\begin{cases} \forall x \in \mathbf{D} \Rightarrow -x \in \mathbf{D} \\ k(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = k(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ k(x) là hàm số chẵn.

e) Tập xác định của u(x) là $\mathbf{D} = \mathbf{R}$.

Với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có: $u(-x) = 2\cos\left(-x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra: $u(-x) \neq u(x)$ và $u(-x) \neq -u(x)$.

Vậy hàm số u(x) không chẵn, không lẻ.

f) Tập xác định của p(x) là $\mathbf{D} = \mathbf{R}$.

Ta có: $\begin{cases} \forall x \in \mathbf{D} \Rightarrow -x \in \mathbf{D} \\ p(-x) = \sin^4(-x) + \cos^4(-x) = \sin^4 x + \cos^4 x = p(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ p(x) là hàm số chẵn.

Ví dụ19. Chứng minh rằng với mỗi hàm số $y = f(x)$ sau ta đều có $f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbf{Z}$, x thuộc tập xác định của hàm

a) $y = 3\tan^2 x + 5$ **b)** $y = 2\sin x\cos x$ **c)** $y = -2\sin^2 x$.

Giải

a) Ta có : $f(x+k\pi)=3\tan^2(x+k\pi)+5=3\tan^2x+5=f(x)$.

b) Ta có : $f(x+k\pi)=2\sin(x+k\pi)\cos(x+k\pi)$

$$=2(-1)^k\sin x(-1)^k\cos x$$

$$=2.(-1)^{2k}\sin x\cos x=2\sin x\cos x=f(x).$$

c) Ta có :

$$f(x+k\pi)=-2\sin^2(x+k\pi)=-2[(-1)^k\sin x]^2=-2(-1)^{2k}\sin^2x$$

$$=-2\sin^2x=f(x).$$

Ví dụ 20. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất các hàm số :

a) $f(x)=1+2\sin x$

b) $g(x)=2\sin\sqrt{x}$

c) $h(x)=(2\sin x+\cos x)(2\cos x-\sin x)$.

Giải

a) Ta có : $-1\le\sin x\le1,\forall x\Rightarrow-2\le2\sin x\le2,\forall x\Rightarrow-1\le f(x)\le3$

$$f(x)=-1\Leftrightarrow\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}.$$

$$f(x)=3\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất là 3, nhỏ nhất là -1.

b) Ta nhận thấy

- $y=\sin\sqrt{x}$ đạt giá trị lớn nhất là 1 khi $\sqrt{x}=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbf{Z},k\ge0$.
- $y=\sin\sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất là -1 khi $\sqrt{x}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbf{Z}^+$.

Nên hàm số $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất là 2, đạt giá trị nhỏ nhất là -2.

c) Ta có : $h(x)=(2\sin x+\cos x)(2\cos x-\sin x)$

$$=4\sin x\cos x-2\sin^2x+2\cos^2x-\sin x\cos x$$

$$=3\sin x\cos x+2(\cos^2x-\sin^2x)=\frac{3}{2}\sin2x+2\cos2x$$

Áp dụng BĐT Bu - nhi - a - cốp - xki :

$$\left(h(x)\right)^2\le\left(\frac{9}{4}+4\right)(\sin^2 2x+\cos^2 2x)=\frac{25}{4}\Rightarrow-\frac{5}{2}\le h(x)\le\frac{5}{2}$$

Nên hàm số $h(x)$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{5}{2}$, đạt giá trị nhỏ nhất là $-\frac{5}{2}\cdot$

Nhắc lại :

Cho 2 bộ số $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$. Ta luôn có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi tồn tại t : $\left[\begin{array}{l} b_i = ta_i \ (i = 1, 2) \\ a_i = tb_i \ (i = 1, 2). \end{array}\right.$

Ví dụ 21. Cho hàm số $y = f(x) = \sin 2x$

a) Chứng minh : $\forall k \in \mathbf{Z}$ ta luôn có $f(x + k\pi) = f(x), \forall x$

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \sin 2x$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin 2x$.

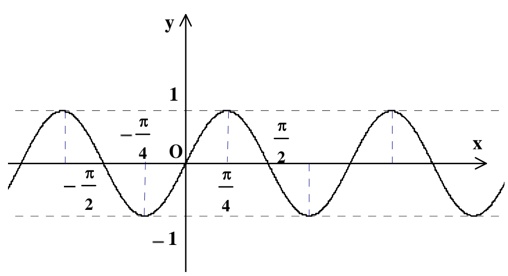
Giải

a) Ta có : $f(x + k\pi) = \sin(2x + k2\pi) = \sin 2x = f(x)$.

b) Bảng biến thiên

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
2x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y=sin 2x	0 ↘	−1 ↗	0 ↗	1 ↘	0

c) Đồ thị



Ví dụ 22. Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = |\sin x|$ **b)** $y = \tan|x|$

c) $y = 2 + \sin x$ **d)** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

a) Ta có: $|\sin x| = \begin{cases} \sin x \text{ nếu } \sin x \ge 0 \\ -\sin x \text{ nếu } \sin x < 0 \end{cases}$

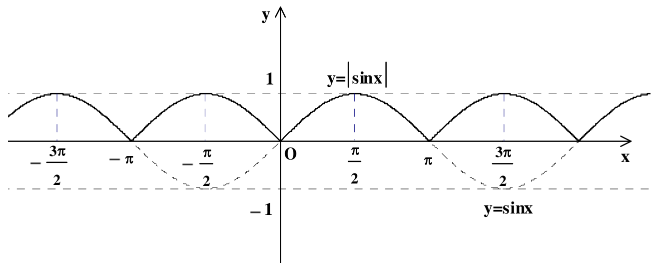
Để vẽ được đồ thị $y = |\sin x|$ ta thực hiện như sau:

• Vẽ đồ thị $y = \sin x$ (đã vẽ ở kiến thức cần nhớ)

• Giữ nguyên phần đồ thị $y = \sin x$ ở phía trên trục hoành Ox

• Phần còn lại của đồ thị $y = \sin x$ ở phía dưới trục hoành Ox, ta chỉ cần lấy đối xứng qua trục Ox.

• Bỏ phần đồ thị dưới trục hoành, ta được đồ thị cần vẽ.

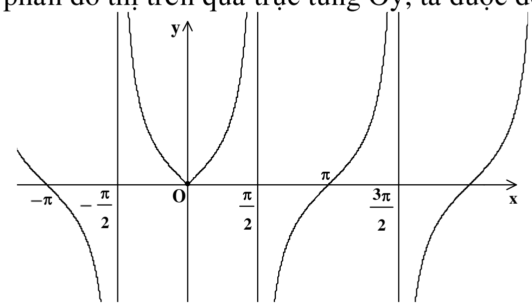


b) Nhận thấy $y = \tan|x|$ là hàm số chẵn, do đó đồ thị của nó sẽ nhận trục tung Oy làm trục đối xứng. Để vẽ được đồ thị $y = \tan|x|$ ta thực hiện các bước như sau:

• Vẽ đồ thị $y = \tan x$ (đã vẽ ở kiến thức cần nhớ)

• Giữ lại phần đồ thị $y = \tan x$ ở phía có hoành độ không âm, bỏ phần đồ thị $y = \tan x$ ở phía có hoành độ âm.

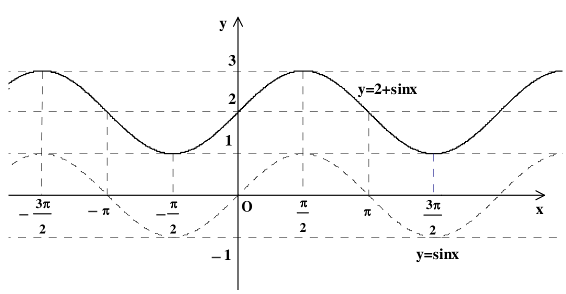
• Lấy đối xứng phần đồ thị trên qua trục tung Oy, ta được đồ thị cần vẽ.



c) Để vẽ được đồ thị $y = 2 + \sin x$ ta tiến hành các bước như sau:

• Vẽ đồ thị $y = \sin x$

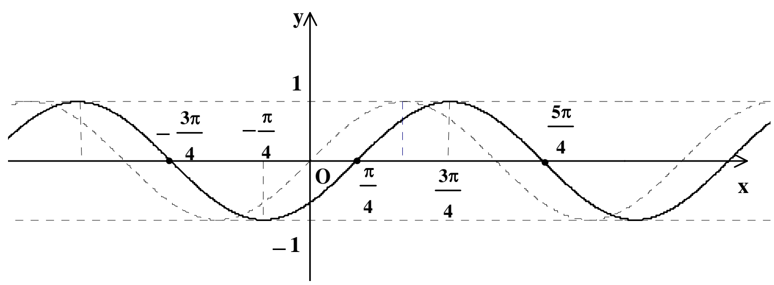
• Tịnh tiến đồ thị $y = \sin x$ theo trục Oy lên phía trên một đoạn có độ dài bằng 2, ta được đồ thị cần vẽ.



d) Để vẽ được đồ thị $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ta tiến hành các bước như sau:

• Vẽ đồ thị $y = \sin x$

• Tịnh tiến đồ thị $y = \sin x$ sang phải theo trục Ox một đoạn có độ dài bằng $\frac{\pi}{4}$, ta được đồ thị cần vẽ.



Chú ý: Câu c, d ta sử dụng định lí tịnh tiến đồ thị:

Trong mặt phẳng, cho đồ thị (G):y=f(x), m, n là hai số tuỳ ý. Khi đó:

- Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ có được khi tịnh tiến (G) lên trên m đơn vị nếu $m > 0$, xuống dưới $|m|$ đơn vị nếu $m < 0$.
- Đồ thị hàm số $y = f(x - n)$ có được khi tịnh tiến (G) sang phải n đơn vị nếu $n > 0$, sang trái $|n|$ đơn vị nếu $n < 0$.

Ví dụ 23. Tìm chu kì của các hàm số :

a) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $y = \sin 2\pi x$

c) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 3x$ **d)** $y = \cos 2x + \sin\frac{x}{2}$

e) $y = \tan 3x + \cos x$ **f)** $y = 1 + \sin x - \sin 2x + 4\sin^3 x$.

Giải

a) Hàm số $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ có chu kì là $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

b) Hàm số $y = \sin 2\pi x$ có chu kì là $\dfrac{2\pi}{|2\pi|} = 1.$

c) Hàm số sinx có chu kì là 2π

Hàm số sin2x có chu kì là π

Hàm số sin3x có chu kì là $\dfrac{2\pi}{3}$

Do đó: Hàm số đã cho có chu kì $T = \text{BSCNN}\left(2\pi, \pi, \dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\pi.$

d) Hàm số cos2x có chu kì là π.

Hàm số $\sin\dfrac{x}{2}$ có chu kì là 4π.

Do đó: Hàm số đã cho có chu kì $T = \text{BSCNN}(\pi, 4\pi) = 4\pi.$

e) Hàm số tan3x có chu kì là $\dfrac{\pi}{3}\cdot$

Hàm số cotx có chu kì là π.

Do đó: Hàm số đã cho có chu kì $T = \text{BSCNN}\left(\dfrac{\pi}{3}, \pi\right) = \pi.$

f) Hàm số đã cho viết lại :

$$y = 1 + \sin x - \sin 2x + 4\left(\frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\right) = 1 + 4\sin x - \sin 2x - \sin 3x.$$

Hàm số sinx có chu kì là 2π.

Hàm số sin2x có chu kì là π.

Hàm số sin3x có chu kì là $\dfrac{2\pi}{3}\cdot$

Do đó: Hàm số đã cho có chu kì $T = \text{BSCNN}\left(2\pi, \pi, \dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\pi.$

CHỦ ĐỀ 5 : TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC BẰNG CÁCH DỰA VÀO PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 24. Tính giá trị của biểu thức $T = \tan^6\dfrac{\pi}{18} + \tan^6\dfrac{5\pi}{18} + \tan^6\dfrac{7\pi}{18}\cdot$

Giải

Ta có: $\tan^2\left(3\cdot\dfrac{\pi}{18}\right) = \tan^2\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{3}$; $\tan^2\left(3\cdot\dfrac{5\pi}{18}\right) = \tan^2\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{3}$ và

$$\tan^2\left(3\cdot\frac{7\pi}{18}\right) = \tan^2\frac{7\pi}{6} = \frac{1}{3}$$

Vậy $x_1 = \frac{\pi}{18}, x_2 = \frac{5\pi}{18}, x_3 = \frac{7\pi}{18}$ là nghiệm của phương trình $\tan^2 3x = \frac{1}{3}$ (1).

Mặt khác $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$ (công thức đã chứng minh ở Ví dụ 40a).

Nên : $(1) \Leftrightarrow \left(\frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}\right)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\tan^6 x - 27\tan^4 x + 33\tan^2 x - 1 = 0$

Đặt $y = \tan^2 x$, ta có phương trình $3y^3 - 27y^2 + 33y - 1 = 0$ (2)

(1) có ba nghiệm y_1, y_2, y_3 là các giá trị của $\tan^2 \frac{\pi}{18}, \tan^2 \frac{5\pi}{18}, \tan^2 \frac{7\pi}{18}$

Vậy $T = \tan^6 \frac{\pi}{18} + \tan^6 \frac{5\pi}{18} + \tan^6 \frac{7\pi}{18} = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3$

Từ (2) $\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = -\frac{(-27)}{3} = 9$; $y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \frac{33}{3} = 11$;

$$y_1y_2y_3 = -\frac{(-1)}{3} = \frac{1}{3}$$

Suy ra :

$T = (y_1 + y_2 + y_3)^3 - 3(y_1 + y_2 + y_3)(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) + 3y_1y_2y_3 = 433.$

CHỦ ĐỀ 6 : CÔNG THỨC CỘNG

Ví dụ 25. Tính :

a) $\sin 75^0$; $\tan 75^0$ **b)** $A = \frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^0} - \frac{1}{\cos 110^0}$.

Giải

a) • $\sin 75^0 = \sin(45^0 + 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

• $\tan 75^0 = \tan(45^0 + 30^0) = \frac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1 - \tan 45^0 \tan 30^0} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}.$$

Ví dụ 26 : Cho $\cos\alpha = \frac{1}{3}, \sin\beta = \frac{1}{4}$ $\left(\text{với } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$. Tính giá trị của $\cos(\alpha + \beta)$.

Giải

- Tính $\sin\alpha$:

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \left(\text{do } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

- Tính $\cos\beta$:

$$\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta = 1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16} \Rightarrow \cos\beta = -\frac{\sqrt{15}}{4} \quad \left(\text{do } \frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right).$$

- Tính $\cos(\alpha+\beta)$:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{-(\sqrt{15}+2\sqrt{2})}{12}$$

Ví dụ 27. Rút gọn các biểu thức

a) $A=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

b) $B=\sin 2x\cot x-\cos 2x.$

Giải

a) $A=\cos\left[\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\cdot$$

b) $B=\sin 2x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}-\cos 2x=\frac{\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x}{\sin x}=\frac{\sin(2x-x)}{\sin x}=1.$

Ví dụ 28. Chứng minh :

a) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

b) $\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b$

c) $\tan a+\tan b=\frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$

d) $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\cos B\sin C\sin A$
$-\cos C\sin A\sin B$

e) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\cdot$

Giải

a) $VP=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$=\sin x+\cos x$ (đpcm).

b) $VT = (\sin a\cos b + \cos a\sin b)(\sin a\cos b - \cos a\sin b)$

$= (\sin a\cos b)^2 - (\cos a\sin b)^2 = \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 b$

$= \sin^2 a(1-\sin^2 b) - (1-\sin^2 a)\sin^2 b$

$= \sin^2 a - \sin^2 a\sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a\sin^2 b = \sin^2 a - \sin^2 b$ (đpcm).

c) $VP = \dfrac{2(\sin a\cos b + \cos a\sin b)}{\cos a\cos b - \sin a\sin b + \cos a\cos b + \sin a\sin b}$

$= \dfrac{2(\sin a\cos b + \cos a\sin b)}{2\cos a\cos b} = \dfrac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b} + \dfrac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}$

$= \tan a + \tan b$ (đpcm).

d) $VT = \cos[(A+B)+C] = \cos(A+B)\cos C - \sin(A+B)\sin C$

$= (\cos A\cos B - \sin A\sin B)\cos C - (\sin A\cos B + \cos A\sin B)\sin C$

$= \cos A\cos B\cos C - \cos A\sin B\sin C - \cos B\sin C\sin A - \cos C\sin A\sin B.$

e) $VT = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\alpha}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} + \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} + \dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

$= \dfrac{(1+\tan\alpha)^2 + (1-\tan\alpha)^2}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{1 + 2\tan\alpha + \tan^2\alpha + 1 - 2\tan\alpha + \tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$= \dfrac{2(1+\tan^2\alpha)}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)}{1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{2}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ (đpcm).

Ví dụ 29. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x

$$A = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Giải

Ta có:

$A = \cos^2 x + \left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)^2$

$= \cos^2 x + \cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2 x - 2\cos\frac{\pi}{3}\cos x\sin\frac{\pi}{3}\sin x + \sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2 x$

$+ \cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2 x + 2\cos\frac{\pi}{3}\cos x\sin\frac{\pi}{3}\sin x + \sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2 x$

$= \cos^2 x + 2\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2 x + 2\sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2 x = \cos^2 x + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos^2 x + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin^2 x$

$= \dfrac{3}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x) = \dfrac{3}{2}$ (đpcm).

Ví dụ 30. Cho $\sin(2\alpha + \beta) = 3\sin\beta$. Chứng minh : $\tan(\alpha + \beta) = 2\tan\alpha$.
(với giả thiết $\tan(\alpha + \beta)$ và $\tan\alpha$ có nghĩa).

Giải

Ta có : $\sin(2\alpha + \beta) = 3\sin\beta \Leftrightarrow \sin[(\alpha + \beta) + \alpha] = 3\sin[(\alpha + \beta) - \alpha]$ (1)

$VT(1) = \sin(\alpha + \beta)\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta)\sin\alpha$

$VP(1) = 3[\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)\sin\alpha]$

$(1) \Leftrightarrow 4\cos(\alpha + \beta)\sin\alpha = 2\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha$

Do $\tan(\alpha + \beta)$ và $\tan\alpha$ có nghĩa, nên ta chia hai vế của (1) cho $2\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha$

Ta sẽ được : $\tan(\alpha + \beta) = 2\tan\alpha$ (đpcm).

Ví dụ 31. Chứng minh trong tam giác ABC, ta có :

a) $\sin A\cos B + \cos A\sin B = \sin C$

b) $\cos(A - C) - \cos B = 2\cos A\cos C$

c) $\cos\left(\dfrac{A}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{B - C}{2}\right) = 2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

d) $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} = 1.$

Giải

a) Vì A, B, C là ba góc của ΔABC nên $A + B + C = \pi \Rightarrow A + B = \pi - C$.

Ta có : $VT = \sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C$ (đpcm).

b) Vì A, B, C là 3 góc của ΔABC nên $B = \pi - (A + C) \Rightarrow \cos B = -\cos(A + C)$

Ta có : $VT = \cos(A - C) + \cos(A + C)$

$= (\cos A\cos C + \sin A\sin C) + (\cos A\cos C - \sin A\sin C)$

$= 2\cos A\cos C$ (đpcm).

c) Vì A, B, C là ba góc của ΔABC nên $\dfrac{A}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B + C}{2}$

$\Rightarrow \cos\dfrac{A}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B + C}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{B + C}{2}\right).$

$VT = \sin\left(\dfrac{B + C}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{B - C}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{B}{2} - \dfrac{C}{2}\right)$

$= \left(\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} + \cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right) + \left(\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} - \cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right)$

$= 2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ (đpcm).

d) Vì A, B, C là ba góc của ΔABC nên $A + B + C = \pi \Rightarrow A + B = \pi - C$

Ta có: $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi-C}{2}\right)\Rightarrow\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$\Rightarrow\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$\Rightarrow\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$ (đpcm).

CHỦ ĐỀ 7: CÔNG THỨC NHÂN

Ví dụ 32.

a) Cho $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ với $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính $\sin2\alpha$

b) Tính $\cos\frac{\pi}{12}$

c) Tính $A=\frac{3+\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$ biết $\tan\frac{\alpha}{2}=2$.

Giải

a) • Tính $\cos\alpha$: $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{3}{5}\left(\text{do }\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$

• Tính $\sin2\alpha$: $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$.

b) $\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

c) Đặt $t=\tan\frac{\alpha}{2}$.

Ta có: $A=\frac{3+\frac{2t}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{3t^2+2t+3}{3t^2+1}=\frac{12+4+3}{12+1}=\frac{19}{13}$.

Ví dụ 33. Chứng minh:

a) $\sin3a=3\sin a-4\sin^3a$; $\cos3a=4\cos^3a-3\cos a$

b) $\frac{1-\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$

c) $\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}-\frac{\cos a-\sin a}{\cos a+\sin a}=2\tan2a$

d) $\cot a-\tan a-2\tan2a-4\tan4a=8\cot8a$

Giải

a) Ta có:

- $\sin 3a = \sin(a+2a) = \sin a\cos 2a + \cos a\sin 2a$

$$= \sin a(1-2\sin^2 a) + 2\sin a\cos^2 a = \sin a - 2\sin^3 a + 2\sin a(1-\sin^2 a)$$

$$= 3\sin a - 4\sin^3 a \text{ (đpcm)}.$$

- $\cos 3a = \cos(a+2a) = \cos a\cos 2a - \sin a\sin 2a$

$$= \cos a\,(2\cos^2 a - 1) - 2\cos a\sin^2 a$$

$$= 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a(1-\cos^2 a) = 4\cos^3 a - 3\cos a \text{ (đpcm)}.$$

b) $VT = \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \dfrac{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2}{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)}$

$$= \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} \text{ (đpcm)}$$

c) $VT = \dfrac{(\cos a + \sin a)^2 - (\cos a - \sin a)^2}{\cos^2 a - \sin^2 a}$

$$= \frac{\cos^2 a + 2\cos a\sin a + \sin^2 a - (\cos^2 a - 2\cos a\sin a + \sin^2 a)}{\cos 2a}$$

$$= \frac{2(2\cos a\sin a)}{\cos 2a} = \frac{2\sin 2a}{\cos 2a} = 2\tan 2a \text{ (đpcm)}.$$

d) Ta có: $\cot x - \tan x = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x} = \dfrac{\cos 2x}{\dfrac{\sin 2x}{2}} = 2\cot 2x \quad (1)$

Áp dụng (1): $VT = 2\cot 2a - 2\tan 2a - 4\tan 4a = 2(\cot 2a - \tan 2a) - 4\tan 4a$

$$= 4\cot 4a - 4\tan 4a = 4(\cot 4a - \tan 4a) = 8\cot 8a \text{ (đpcm)}.$$

Chú ý: Ta sử dụng Ví dụ 33a) như công thức

- $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a;\quad \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$
- $\sin^3 a = \dfrac{3\sin a - \sin 3a}{4};\ \cos^3 a = \dfrac{3\cos a + \cos 3a}{4}.$

Ví dụ 34. Chứng minh:

a) $\dfrac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \tan\alpha$

b) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\alpha\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\alpha\right) = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sin x + 1 - \cos x}{\sin x - 1 + \cos x} = \dfrac{1+\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan\dfrac{x}{2}}.$

Giải

a) $VT=\dfrac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\tan\alpha$ (đpcm).

b) $VT=\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{2}-\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{2}=\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cos2\alpha+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin2\alpha\right)-\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cos2\alpha-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin2\alpha\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}\cdot2\sin\dfrac{\pi}{4}\sin2\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{\sqrt{2}}$ (đpcm).

c) *Cách1.* $VT=\dfrac{\sin x+(1-\cos x)}{\sin x-(1-\cos x)}=\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}$

$$VP=\dfrac{1+\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1-\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}=\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}=VT \text{ (đpcm).}$$

Cách2. Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}\cdot VT=\dfrac{\dfrac{2t}{1+t^2}+1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}-1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\dfrac{2t^2+2t}{-2t^2+2t}$

$=\dfrac{2t(1+t)}{2t(1-t)}=\dfrac{1+\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan\dfrac{x}{2}}$ (đpcm).

> **Ví dụ 35.** Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x :
>
> **a)** $A=-\sin2x+2\cos^2(45^0-x)$
>
> **b)** $B=\dfrac{\cos^3x-\cos3x}{\cos x}+\dfrac{\sin^3x+\sin3x}{\sin x}\cdot$

Giải

a) Ta có : $A=-\sin2x+2\left(\dfrac{1+\cos(90^0-2x)}{2}\right)=-\sin2x+1+\sin2x=1$ (đpcm).

b) $B=\dfrac{\cos^3x-(4\cos^3x-3\cos x)}{\cos x}+\dfrac{\sin^3x+3\sin x-4\sin^3x}{\sin x}$

$$= \frac{-3\cos^3 x + 3\cos x}{\cos x} + \frac{3\sin x - 3\sin^3 x}{\sin x}$$

$$= -3\cos^2 x + 3 + 3 - 3\sin^2 x = 6 - 3(\cos^2 x + \sin^2 x) = 6 - 3 = 3 \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 36. Tìm m để biểu thức sau không phụ thuộc x

$$A = m^2\sqrt{2}.\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sin 2x(\cos 2x + m\sin 2x) - (1 - m).$$

Giải

$$A = m^2(\sin 4x + \cos 4x) - 2\sin 2x\cos 2x - 2m\sin^2 2x - 1 + m$$

$$= m^2\sin 4x + m^2\cos 4x - \sin 4x - 2m\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) - 1 + m$$

$$= (m^2 - 1)\sin 4x + (m^2 + m)\cos 4x - 1$$

Để biểu thức không phụ thuộc x thì $\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m^2 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

Vậy với $m = -1$ thì A sẽ không phụ thuộc x.

Ví dụ 37. Chứng minh rằng $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

Giải

Ta có:

$$VT = \frac{\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\right)\cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{-\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} \left(\text{do } \cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{\left(-\sin\frac{4\pi}{7}\right)\left(-\cos\frac{4\pi}{7}\right)}{4\sin\frac{\pi}{7}} \left(\text{do } \cos\frac{3\pi}{7} = -\cos\frac{4\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8} \left(\text{do } \sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}\right) \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 38.

a) Chứng minh rằng $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

b) Rút gọn biểu thức $A = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}$.

Giải

a) Đặt $a = \sin^2 x$ và $b = \cos^2 x \Rightarrow a + b = 1$.

$VT = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 1 - 2ab = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - \frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$ (đpcm).

b) Vì $\bullet\ \sin\frac{7\pi}{16} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}\right) = \cos\frac{\pi}{16}$

$\bullet\ \sin\frac{5\pi}{16} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{16}\right) = \cos\frac{3\pi}{16}$; $\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$

Nên $A = \left(\sin^4\frac{\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}\right) + \left(\sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16}\right)$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8} + 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8}$ (áp dụng câu a)

$= 2 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}\right) = 2 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 39 :

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} - \frac{1}{\sin^2 x}$

b) Rút gọn : $\mathbf{S} = \frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}} + \frac{1}{4^2\cos^2\frac{a}{2^2}} + \cdots + \frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}$.

Giải

a) Ta có: $\frac{4}{\sin^2 2x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{4}{(2\sin x\cos x)^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{4}{4\sin^2 x\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$

$= \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ (đpcm).

b) Áp dụng câu a cho từng số hạng của **S**, ta có:

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{4\sin^2\frac{a}{2}} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{4^2\cos^2\frac{a}{2^2}} = \frac{1}{4\sin^2\frac{a}{2}} - \frac{1}{4^2\sin^2\frac{a}{2^2}} \qquad (2)$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}=\frac{1}{4^{n-1}\sin^2\frac{a}{2^{n-1}}}-\frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}} \qquad (n)$$

Cộng (1), (2),..., (n) vế theo vế, ta được : $\mathbf{S}=\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}}$.

Ví dụ 40.

a) Chứng minh : $\cos a=\frac{\sin 2a}{2\sin a}$

b) Rút gọn : $P=\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

Giải

a) Ta có : $\frac{\sin 2a}{2\sin a}=\frac{2\sin a\cos a}{2\sin a}=\cos a$ (đpcm).

b) Áp dụng câu a cho từng số hạng của P, ta có:

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad (1)$$

$$\cos\frac{x}{2^2}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{4}} \qquad (2)$$

$$\cdots$$

$$\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}} \qquad (n)$$

Nhân (1), (2), ..., (n) vế theo vế, ta được : $P=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$.

Ví dụ 41.

a) Chứng minh : $\tan 3\alpha=\tan\alpha.\tan(60^0-\alpha).\tan(60^0+\alpha)$

b) Chứng minh :

$\tan 3^0\tan 17^0\tan 23^0\tan 37^0\tan 43^0\tan 57^0\tan 63^0\tan 77^0\tan 83^0=\tan 27^0$.

Giải

a) Ta có : $\tan 3\alpha=\tan(\alpha+2\alpha)$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan 2\alpha}{1-\tan\alpha\tan 2\alpha}=\frac{\tan\alpha+\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{1-\tan\alpha\left(\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right)}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

$$=\frac{\tan\alpha(\sqrt{3}^2-\tan^2\alpha)}{1-(\sqrt{3}\tan\alpha)^2}=\tan\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}-\tan\alpha}{1+\sqrt{3}\tan\alpha}\cdot\frac{\sqrt{3}+\tan\alpha}{1-\sqrt{3}\tan\alpha}\cdot$$

$$=\tan\alpha\cdot\frac{\tan60^0-\tan\alpha}{1+\tan60^0\tan\alpha}\cdot\frac{\tan60^0+\tan\alpha}{1-\tan60^0\tan\alpha}=\tan\alpha\tan(60^0-\alpha)\tan(60^0+\alpha).$$

b) Áp dụng câu a, ta có: $\tan3^0\tan57^0\tan63^0=\tan9^0$

$$\tan17^0\tan43^0\tan77^0=\tan51^0$$

$$\tan23^0\tan37^0\tan83^0=\tan69^0$$

Suy ra: $VT=\tan9^0\tan51^0\tan69^0=\tan27^0$ (do áp dụng a) (đpcm).

Ví dụ 42: Giả sử α,β là hai giá trị khác nhau của x thỏa mãn phương trình $a\cos x+b\sin x=c$ với $a^2+b^2\neq 0$. Chứng minh: $\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{(a+c)^2}{4(a^2+b^2)}\cdot$

Giải

Từ $a\cos x+b\sin x=c\Rightarrow(a\cos x-c)^2=(-b\sin x)^2$

$$\Rightarrow a^2\cos^2x-2ac\cos x+c^2=b^2(1-\cos^2x)$$

$$\Leftrightarrow(a^2+b^2)\cos^2x-2ac\cos x+c^2-b^2=0\ (1)$$

Suy ra: $\cos\alpha,\cos\beta$ là hai nghiệm của (1)

Theo định lí Vi-ét: $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{2ac}{a^2+b^2}$; $\cos\alpha\cos\beta=\frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}$

Do đó: $\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\cdot\frac{1+\cos\beta}{2}=\frac{1+(\cos\alpha+\cos\beta)+\cos\alpha\cos\beta}{4}$

$$=\frac{1+\dfrac{2ac}{a^2+b^2}+\dfrac{c^2-b^2}{a^2+b^2}}{4}=\frac{(a+c)^2}{4(a^2+b^2)}\text{ (đpcm).}$$

CHỦ ĐỀ 8 : CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

Ví dụ 43. Biến đổi tích thành tổng:

a) $A=2\cos5x\sin x$ **b)** $B=2\sin4\alpha\sin\alpha$

c) $C=\cos(\alpha+30^0)\cos(\alpha-30^0)$ **d)** $D=2\cos x\cos2x\cos3x$

e) $E=4\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$ **f)** $F=4\sin(2\alpha-\beta)\cos(2\alpha+\beta)$.

Giải

a) Ta có: $A=2\sin x\cos5x=2\cdot\frac{1}{2}\left[\sin(x+5x)+\sin(x-5x)\right]$

$= \sin 6x + \sin(-4x) = \sin 6x - \sin 4x.$

b) $B = 2\sin 4\alpha \sin\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}\left[\cos(4\alpha-\alpha) - \cos(4\alpha+\alpha)\right] = \cos 3\alpha - \cos 5\alpha.$

c) $C = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+30^0+\alpha-30^0) + \cos(\alpha+30^0-\alpha+30^0)\right] = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 60^0)$

$= \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\cdot$

d) $D = 2(\cos 3x\cos x)\cos 2x = 2\cdot\frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)\cos 2x = \cos 4x\cos 2x + \cos^2 2x$

$= \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) + \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x).$

e) $E = 4\cdot\frac{1}{2}\{\cos[(a-b)-(b-c)] - \cos[(a-b)+(b-c)]\}\cdot\sin(c-a)$

$= 2[\cos(a+c-2b) - \cos(a-c)]\sin(c-a)$

$= 2\sin(c-a)\cos(a+c-2b) - 2\sin(c-a)\cos(a-c)$

$= \sin(2c-2b) + \sin(2b-2a) + \sin(2a-2c)$

$= \sin 2(c-b) + \sin 2(b-a) + \sin 2(a-c).$

f) $F = 4\cdot\frac{1}{2}\{\sin[(2\alpha-\beta)+(2\alpha+\beta)] + \sin[(2\alpha-\beta)-(2\alpha+\beta)]\}$

$= 2[\sin 4\alpha + \sin(-2\beta)] = 2(\sin 4\alpha - \sin 2\beta).$

Ví dụ 44. Biến đổi tổng thành tích :

a) $A = \sin 6\alpha - \sin 4\alpha$ **b)** $B = \cos 3\beta - \cos 5\beta$

c) $C = \cos x + \cos 2x$ **d)** $D = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

e) $E = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$ **f)** $F = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - \frac{3}{2}$

g) $G = \sin x + \cos x$ **h)** $H = \cos x - \cos 2x + \cos 3x.$

Giải

a) $A = 2\cos\frac{6\alpha+4\alpha}{2}\sin\frac{6\alpha-4\alpha}{2} = 2\cos 5\alpha\sin\alpha.$

b) $B = -2\sin\frac{3\beta+5\beta}{2}\sin\frac{3\beta-5\beta}{2} = -2\sin 4\beta\sin(-\beta) = 2\sin 4\beta\sin\beta.$

c) $C = 2\cos\frac{2x+x}{2}\cos\frac{2x-x}{2} = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot$

d) $D = (1+\cos 2x) + (\cos 3x + \cos x) = 2\cos^2 x + 2\cos 2x\cos x$

$= 2\cos x(\cos 2x + \cos x) = 4\cos x\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot$

e) $E = (\cos 6x + \cos 2x) + \cos 4x = 2\cos 4x\cos 2x + \cos 4x$

$= 2\cos 4x\left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) = 2\cos 4x(\cos 2x + \cos 60^0)$

$$= 4\cos 4x\cos\frac{2x+60^0}{2}\cos\frac{2x-60^0}{2} = 4\cos 4x\cos(x+30^0)\cos(x-30^0).$$

f) $F = \dfrac{1-\cos 2x}{2} + \dfrac{1-\cos 4x}{2} + \dfrac{1-\cos 6x}{2} - \dfrac{3}{2}$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) - \frac{3}{2}$$

$$= -2\cos 4x\cos(x+30^0)\cos(x-30^0).$$

g) $G = \sin x + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\dfrac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\cos\dfrac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = 2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

h) $H = (\cos 3x + \cos x) - \cos 2x = 2\cos 2x\cos x - \cos 2x$

$$= 2\cos 2x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 2\cos 2x(\cos x - \cos 60^0)$$

$$= -4\cos 2x\sin\left(\frac{x}{2} + 30^0\right)\sin\left(\frac{x}{2} - 30^0\right).$$

Ví dụ 45 : Tính giá trị của các biểu thức :

a) $A = \sin 15^0 \sin 75^0$

b) $B = \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0$

c) $C = \tan 9^0 - \tan 27^0 - \tan 63^0 + \tan 81^0$

d) $D = \dfrac{1}{\cos 80^0} - 4\cos 20^0$

e) $E = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}\cdot$

Giải

a) $A = \dfrac{1}{2}\left[\cos(75^0 - 15^0) - \cos(75^0 + 15^0)\right] = \dfrac{1}{2}(\cos 60^0 - \cos 90^0) = \dfrac{1}{4}\cdot$

b) $B = \dfrac{1}{2}(\cos 60^0 + \cos 20^0)\cos 80^0 = \dfrac{1}{4}\cos 80^0 + \dfrac{1}{2}\cos 80^0\cos 20^0$

$$= -\frac{1}{4}\cos 100^0 + \frac{1}{4}(\cos 100^0 + \cos 60^0) = \frac{1}{8}\left(\text{do } \cos 80^0 = -\cos 100^0\right).$$

c) $C = (\tan 81^0 + \tan 9^0) - (\tan 63^0 + \tan 27^0) = \dfrac{\sin 90^0}{\cos 81^0\cos 9^0} - \dfrac{\sin 90^0}{\cos 63^0\cos 27^0}$

$$= \frac{1}{\sin 9^0\cos 9^0} - \frac{1}{\sin 27^0\cos 27^0} = \frac{2}{\sin 18^0} - \frac{2}{\sin 54^0} = \frac{2(\sin 54^0 - \sin 18^0)}{\sin 18^0\sin 54^0}$$

$$= \frac{4\cos 36^0\sin 18^0}{\sin 18^0\cos 36^0} = 4.$$

d) $D=\dfrac{1-4\cos 80^0\cos 20^0}{\cos 80^0}=\dfrac{1-2(\cos 100^0+\cos 60^0)}{\cos 80^0}=\dfrac{1-2\cos 100^0-1}{-\cos 100^0}=2.$

e) Ta có : $\left(2\sin\dfrac{\pi}{7}\right)E=2\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}+2\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}+2\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}$

$\Leftrightarrow\left(2\sin\dfrac{\pi}{7}\right)E=\left(\sin\dfrac{3\pi}{7}-\sin\dfrac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\dfrac{5\pi}{7}-\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\pi-\sin\dfrac{5\pi}{7}\right)$

$\Leftrightarrow(2\sin\dfrac{\pi}{7})E=-\sin\dfrac{\pi}{7}\Rightarrow E=-\dfrac{1}{2}\cdot$

Ví dụ 46. Rút gọn các biểu thức :

a) $A=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{2}\right)$

b) $B=\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$

c) $C=\sin x(1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x)$

d) $D=\dfrac{\sin x+\sin(x+y)+\sin(x+2y)}{\cos x+\cos(x+y)+\cos(x+2y)}$.

Giải

a) Ta có :

$$A=\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}{2}-\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{2}=\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]$$

$$=\dfrac{1}{2}\left(2\cos\dfrac{\pi}{4}\cos x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x.$$

b) Ta có : $B=\dfrac{(\sin 5x+\sin x)+\sin 3x}{(\cos 5x+\cos x)+\cos 3x}=\dfrac{2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x}{2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x}$

$$=\dfrac{\sin 3x(2\cos 2x+1)}{\cos 3x(2\cos 2x+1)}=\tan 3x.$$

c) $C=\sin x+2\sin x\cos 2x+2\sin x\cos 4x+2\sin x\cos 6x$

$=\sin x+(\sin 3x-\sin x)+(\sin 5x-\sin 3x)+(\sin 7x-\sin 5x)=\sin 7x.$

d) Tacó :

$$D=\dfrac{[\sin(x+2y)+\sin x]+\sin(x+y)}{[\cos(x+2y)+\cos x]+\cos(x+y)}=\dfrac{2\sin(x+y)\cos y+\sin(x+y)}{2\cos(x+y)\cos y+\cos(x+y)}$$

$$=\dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\tan(x+y).$$

Ví dụ 47. Chứng minh rằng :

a) $4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha=\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha$

b) $\sin a\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+\sin c\sin(a-b)=0.$

Giải

a) $VP = (\sin 7\alpha + \sin\alpha) + (\sin 5\alpha + \sin 3\alpha) = 2\sin 4\alpha\cos 3\alpha + 2\sin 4\alpha\cos\alpha$

$= 2\sin 4\alpha(\cos 3\alpha + \cos\alpha) = 2\sin 4\alpha(2\cos 2\alpha\cos\alpha)$

$= 4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha$ (đpcm).

b) $VT = \frac{1}{2}[\cos(a-b+c) - \cos(a+b-c) + \cos(b-c+a) - \cos(b+c-a)$

$+ \cos(c-a+b) - \cos(c+a-b)] = 0.$

Ví dụ 48. Chứng minh rằng :

a) $\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 5x = 8\sin^2 x\cos^3 x$

b) $\frac{8\cos^4 x - 4\cos^3 x - 8\cos^2 x + 3\cos x + 1}{8\cos^4 x + 4\cos^3 x - 8\cos^2 x - 3\cos x + 1} = -\tan\frac{7x}{2}\tan\frac{x}{2}\cdot$

Giải

a) $VT = \cos x - \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 3x) = \cos x - \frac{1}{2}(2\cos 4x\cos x)$

$= \cos x - \cos 4x\cos x = \cos x(1 - \cos 4x) = \cos x(2\sin^2 2x)$

$= 2\cos x(2\sin x\cos x)^2 = 8\sin^2 x\cos^3 x.$

b) $VT = \frac{8\cos^4 x - 8\cos^2 x - (4\cos^3 x - 3\cos x) + 1}{8\cos^4 x - 8\cos^2 x + (4\cos^3 x - 3\cos x) + 1}$

$= \frac{8\cos^2 x(\cos^2 x - 1) - \cos 3x + 1}{8\cos^2 x(\cos^2 x - 1) + \cos 3x + 1}$

$= \frac{-8\cos^2 x\sin^2 x - \cos 3x + 1}{-8\cos^2 x\sin^2 x + \cos 3x + 1} = \frac{1 - 2(2\sin x\cos x)^2 - \cos 3x}{1 - 2(2\sin x\cos x)^2 + \cos 3x}$

$= \frac{1 - 2\sin^2 2x - \cos 3x}{1 - 2\sin^2 2x + \cos 3x} = \frac{\cos 4x - \cos 3x}{\cos 4x + \cos 3x} = \frac{-2\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$= -\tan\frac{7x}{2}\tan\frac{x}{2}$ (đpcm).

Ví dụ 49 : Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x :

$A(x) = \sin^2(a+x) - \cos^2 x + 2\cos a\cos x\cos(a+x).$

Giải

Cách1. Ta có:

$$A=\frac{1-\cos(2a+2x)}{2}-\frac{1+\cos 2x}{2}+2\cos a\cos x\cos(a+x)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos(2a+2x)+\cos 2x\right]+2\cos a\cos x\cos(a+x)$$

$$=-\cos(a+2x)\cos a+2\cos a[\cos x\cos(a+x)]$$

$$=-\cos(a+2x)\cos a+\cos a\left[\cos(a+2x)+\cos a\right]=\cos^2 a\ (\text{đpcm}).$$

Cách2. Đạo hàm :

$$A'(x)=2\sin(a+x)[\sin(a+x)]'-2\cos x(\cos x)'$$
$$+2\cos a[(\cos x)'\cos(a+x)+(\cos(a+x))'\cos x]$$

$$=2\sin(a+x)\cos(a+x)+2\cos x\sin x$$
$$+2\cos a[-\sin x\cos(a+x)-\sin(a+x)\cos x]$$

$$=[\sin(2a+2x)+\sin 2x]-2\cos a\sin(2x+a)$$

$$=2\sin(a+2x)\cos a-2\cos a\sin(2x+a)=0.$$

Suy ra : A(x) là hằng số

Vậy A(x) không phụ thuộc x (đpcm).

Ví dụ 50. Chứng minh trong tam giác ABC, ta có :

a) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

b) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

c) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$

d) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

e) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C.$

Giải

Các bài này có sử dụng kết quả a, b, c, d ví dụ 16

a) $VT=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C[-\cos(A+B)]$$

$$=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

$$=2\sin C[-2\sin A\sin(-B)]$$

$$=4\sin A\sin B\sin C\ (\text{đpcm}).$$

b) $VT = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ (đpcm).

c) $VT = 2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1$

$= -2\cos C\cos(A-B) - 2\cos(A+B)\cos C - 1$

$= -1 - 2\cos C[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

$= -1 - 2\cos C(2\cos A\cos B)$

$= -1 - 4\cos A\cos B\cos C$ (đpcm).

d) $VT = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$

$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right) = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (đpcm).

e) $VT = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1 - 4\cos A\cos B\cos C)$

$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C$ (đpcm).

Ví dụ 51. Chứng minh trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

Giải

- Đặt $M = \sin A + \sin B - \sin C$. Ta có:

$M = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left(-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right) = 4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$

- Đặt $N = \cos A + \cos B - \cos C + 1$. Ta có:

$$N = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right) = 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

Vậy $\dfrac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}\cdot$

Ví dụ 52. Rút gọn : $\mathbf{S} = \cos a + \cos 2a + \cdots + \cos na$ với $n \in \mathbf{N}^*$.

Giải

- Nếu $a = k2\pi, k \in \mathbf{Z} : \mathbf{S} = n$.
- Nếu $a \neq k2\pi, k \in \mathbf{Z}$:

$$\mathbf{S} = 2\sin\frac{a}{2}\cos a + 2\sin\frac{a}{2}\cos 2a + \cdots + 2\sin\frac{a}{2}\cos na$$

$$= \left(\sin\frac{3a}{2} - \sin\frac{a}{2}\right) + \left(\sin\frac{5a}{2} - \sin\frac{3a}{2}\right) + \cdots + \left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)a - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)a\right]$$

$$= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)a - \sin\frac{a}{2} = 2\sin\frac{na}{2}\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)a \Rightarrow S = \frac{\sin\frac{na}{2}\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)a}{\sin\frac{a}{2}}\cdot$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

CHỦ ĐỀ 1 : KHÁI NIỆM GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC, DẤU CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC- TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Bài tập 1. Điền vào các ô trống trong bảng

Số đo độ	-30^0	-150^0			590^0
Số đo rađian			$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$	

Bài tập 2.

a) Đổi số đo độ của cung tròn sau thành số đo rađian : $21^0 30'$, $75^0 54'$, 18^0, 1845^0.

b) Đổi số đo rađian của các cung tròn sau thành số đo độ : $-\dfrac{8\pi}{3}, \dfrac{149\pi}{720}\cdot$

Bài tập 3. Với mỗi góc lượng giác có số đo $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{30\pi}{7}, 1000^0$. Tìm góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với nó có số đo là số dương nhỏ nhất.

Bài tập 4. Cho sđ$(Ou, Ov) = 19^0 30' + k.360^0$, $k \in \mathbf{Z}$.

a) Với k bằng bao nhiêu thì sđ$(Ou, Ov) = 1819^0 30'$.

b) Góc có sđ$(Ou, Ov) = 969^0 30'$ có phải là một trong các góc (Ou, Ov)?

Bài tập 5. Cho $\alpha = 40^0 + k.360^0$, $k \in \mathbf{Z}$. Xác định các góc α sao cho $|\alpha| \le 360^0$.

Bài tập 6. Tính các giá trị các biểu thức :

a) $A = 5\cos 0 - 2\sin\frac{\pi}{2} - 8\cot\frac{\pi}{2}$

b) $B = 2\cos^2\pi + 4\sin^2\frac{\pi}{6} - 3\tan^2\frac{\pi}{3}$

c) $C = \tan 420^0 + \sqrt{3}\sin 780^0 - 2\cos 1470^0$

d) $D = \dfrac{2[\tan(\alpha - \beta) + \sin\alpha\,]\cos\alpha}{\cos 3\alpha + \sin 9\beta}$ (cho $\alpha = 60^0, \beta = 30^0$).

Bài tập 7. Xác định dấu của :

a) $\cos 232^0$

b) $\cos 238^0 \tan 136^0$

c) $\cot\dfrac{2\pi}{5}\sin\left(-\dfrac{3\pi}{5}\right)$

d) $\sin(270^0 - \alpha)$ $(0^0 < \alpha < 90^0)$.

CHỦ ĐỀ 2 : HỆ THỨC CƠ BẢN

Bài tập 8. Tính các giá trị lượng giác của góc α trong mỗi trường hợp sau :

a) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$ với $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

b) $\tan\alpha = 2$ với $-\pi < \alpha < -\dfrac{\pi}{2}\cdot$

Bài tập 9. Cho $\sin\alpha = \dfrac{7}{25}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha - 1}$

Bài tập 10. Cho $\tan\alpha = -2$. Tính giá trị của biểu thức : $A = \dfrac{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha - 2\sin\alpha}\cdot$

Bài tập 11. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \sin^2 a + \sin^2 a\tan^2 a$

b) $B = \dfrac{1 - 2\sin^2 a}{\sin a + \cos a}$

c) $C = \sin^2 a(1 + \cot a) + \cos^2 a(1 + \tan a)$

d) $D = \sqrt{\dfrac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} + \sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$

e) $E = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}\left[1 - \dfrac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x}\right]$

f) $F = \dfrac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + \sin\alpha} - \dfrac{1}{1 - \sin\alpha}\cdot$

Bài tập 12. Chứng minh :

a) $\sin^4 x-\cos^4 x=2\sin^2 x-1$

b) $\cot^2 x-\cos^2 x=\cot^2 x\cos^2 x$

c) $\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)^2+\left(\cos x+\dfrac{1}{\cos x}\right)^2-\tan^2 x-\cot^2 x=7$

d) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\tan^2\alpha+1}{\tan^2\alpha-1}$

e) $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{1-\cos x}=\dfrac{2\cos x}{\sin x-\cos x+1}$

f) $\cos x\left(1+\dfrac{1}{\cos x}+\tan x\right)\left(1-\dfrac{1}{\cos x}+\tan x\right)=2\sin x$

g) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin^3 x}=\cot^3 x+\cot^2 x+\cot x+1$

h) $\dfrac{\cos x\cot x-\sin x\tan x}{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}}=1+\sin x\cos x$

k) $\left(\dfrac{\cos x+\tan x}{1+\cos x\cot x}\right)^2=\dfrac{\cos^2 x+\tan^2 x}{1+\cos^2 x\cot^2 x}\cdot$

Bài tập 13. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x :

a) $A=\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}$

b) $B=\dfrac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x}-\dfrac{(1-\cot^2 x)^2}{4\cot^2 x}$

c) $C=\left(\sqrt{\dfrac{1}{1+\sin x}+\dfrac{1}{1-\sin x}}\right)\cdot\cos x$ với $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$

d) $D=3(1-2\cos^2 x)(\sin^4 x+\cos^4 x)+4(\cos^6 x-2\sin^6 x)+6\sin^4 x$

e) $E=\dfrac{\sin^8 x}{8}-\dfrac{\cos^8 x}{8}-\dfrac{\sin^6 x}{3}+\dfrac{\cos^6 x}{6}+\dfrac{\sin^4 x}{4}\cdot$

Bài tập 14. Tìm m để biểu thức sau không phụ thuộc x :

$A=m(\sin^6 x+\cos^6 x)+2(\sin^4 x+\cos^4 x)$

Bài tập 15. Cho $\dfrac{\sin^4 x}{2}+\dfrac{\cos^4 x}{3}=\dfrac{1}{5}\cdot$ Chứng minh $\dfrac{\sin^8 x}{8}+\dfrac{\cos^8 x}{27}=\dfrac{1}{125}\cdot$

CHỦ ĐỀ 3 : GÓC (CUNG) LIÊN KẾT

Bài tập 16. Tính : $\cos 120^0$, $\cos\dfrac{49\pi}{6}$, $\sin\left(-\dfrac{16\pi}{3}\right)$, $\tan 570^0$.

Bài tập 17. Rút gọn các biểu thức :

a) $A = \tan(2\pi - x) - \tan(\pi - x) + \tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $B = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \cot\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) - \cot\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right) - \cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $C = \left[\sin(2\pi - \alpha) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right]^2 - \left[\cos(5\pi - \alpha) - \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]^2$.

Bài tập 18. Tính :

a) $A = \dfrac{(\cot 34^0 + \tan 236^0)\cos 416^0}{\cos 326^0} - \cot 71^0 \cot 19^0$

b) $B = \dfrac{1}{\tan 188^0} - \dfrac{2\sin 2550^0 \sin 98^0}{2\cos 638^0 + \sin 188^0}$.

Bài tập 19. Chứng minh trong tam giác ABC, ta có :

a) $\tan\left(\dfrac{A + B - 2C}{2}\right) = \cot\dfrac{3C}{2}$

b) $\cos(A + B - 3C) = -\cos 4C$.

CHỦ ĐỀ 4: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài tập 20. Tìm tập hợp xác định của các hàm số :

a) $y = \dfrac{1 - \sin x}{2\sin x}$

b) $y = \tan\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $y = \cot\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right)$

d) $y = \cos\left(\dfrac{5x}{x^2 - 1}\right)$

e) $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{\sin x}$

f) $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$.

Bài tập 21. Xét tính chẵn - lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 4\sin x$

b) $y = 3 + 5\cos x$

c) $y = 2\sin\dfrac{x}{2} + \cos x$

d) $y = |\tan x|$

e) $y = |x|\cos x$

f) $y = \dfrac{2x^4}{\sin x + \tan x}$

g) $y = \dfrac{\cos x + \tan x}{\sin x}$

h) $y = \sin x + 2\tan x + 3\cot 3x$.

Bài tập 22. Tìm chu kì của các hàm số sau :

a) $y = \cos\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $y = 2\sin 2x + \cos\dfrac{x}{2}$

c) $y = \sin^2 2x$

d) $y = 2\cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Bài tập 23. Từ đồ thị của hàm số $y = \cos x$, suy ra đồ thị của các hàm số sau đây và vẽ đồ thị của các hàm số đó

a) $y = -\cos x$ **b)** $y = 2 - \cos x$

c) $y = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **d)** $y = |\cos x|$

e) $y = 1 + |\cos x|$ **f)** $y = 1 - |\cos x|\cdot$

Bài tập 24. Xét hàm số $y = f(x) = \sin\frac{x}{2}$

a) Chứng minh : Với mọi số nguyên k, $f(x + k4\pi) = f(x), \forall x.$

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) = \sin\frac{x}{2}$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \sin\frac{x}{2}\cdot$

Bài tập 25. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của :

a) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ **b)** $y = \sqrt{1 + \sin x} - 5.$

CHỦ ĐỀ 5 : TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC BẰNG CÁCH DỰA VÀO PHƯƠNG TRÌNH

Bài tập 26. Tính : $T = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}}\cdot$

(Trích đề thi đề nghị HSG khu vực ĐBSCL năm 2002)

Bài tập 27. Tính : $E = \cos^4\frac{\pi}{7} + \cos^4\frac{2\pi}{7} + \cos^4\frac{3\pi}{7}$

(Trích đề thi đề nghị HSG khu vực ĐBSCL năm 1998)

CHỦ ĐỀ 6 : CÔNG THỨC CỘNG

Bài tập 28. Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\cdot$ Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

Bài tập 29. Rút gọn các biểu thức :

a) $A = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$

b) $B = \dfrac{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha - \beta)}{1 + \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta)}$

c) $C = 1 - (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2$

d) $D = (1 + \tan\beta\tan 2\beta)\sin 2\beta.$

Bài tập 30. Tính :

a) $A = \frac{3}{2}(\sin 15^0 + \tan 30^0 \cos 15^0)$

b) $B = \dfrac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0}$ **c)** $C = \dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{9}} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{18}}\cdot$

Bài tập 31. Chứng minh :

a) $\dfrac{1 + \cot a \cot b}{1 - \cot a \cot b} = -\dfrac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)}$

b) $\dfrac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{1 - \tan^2\alpha\tan^2\beta} = \tan(\alpha-\beta)\tan(\alpha+\beta)$

c) $\dfrac{\cos(a-b)\cos(a+b)}{1 - \cot^2 a\cot^2 b} = -\sin^2 a\sin^2 b$

d) $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)} - \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan(\alpha-\beta)} = -2\tan\alpha\tan\beta.$

Bài tập 32. Cho $a, b \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\tan a = \dfrac{1}{7}$, $\tan b = \dfrac{3}{4}\cdot$ Chứng minh : $a + b = \dfrac{\pi}{4}\cdot$

Bài tập 33. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{9}{41}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $A = \tan\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)\cdot$

Bài tập 34. Cho $\cos(a+b) = 0$. Chứng minh : $\sin(a+2b) = \sin a$.

Bài tập 35. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x.

a) $A = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) - \cos^2 x$

b) $B = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x.$

Bài tập 36. Tính $\tan x \tan y$ nếu biết $\cos(x+y) = \dfrac{\cos(x-y)}{3}\cdot$

Bài tập 37. Chứng minh trong tam giác ABC, ta có :

a) $\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} - \cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = -\sin\dfrac{A}{2}$

b) $\sin(A-C) - \sin B = -2\cos A\sin C$

c) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

(với A, B, C là ba góc nhọn của tam giác ABC).

Bài tập 38. Cho $\begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\beta = 0 & (1) \\ a\cos(\alpha+\varphi) + b\cos(\beta+\varphi) = 0,\ \varphi \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z} & (2) \end{cases}$

Chứng minh : $a\cos(\alpha + x) + b\cos(\beta + x) = 0, \forall x.$

Bài tập 39. Chứng minh nếu $a, b, c \in \mathbf{R}$ thì (giả sử bài toán đã xác định)

$\dfrac{a-b}{1+ab} + \dfrac{b-c}{1+bc} + \dfrac{c-a}{1+ca} = \dfrac{a-b}{1+ab}\cdot\dfrac{b-c}{1+bc}\cdot\dfrac{c-a}{1+ca}$ (sử dụng phương pháp lượng giác).

CHỦ ĐỀ 7 : CÔNG THỨC NHÂN

Bài tập 40. Cho $\sin x = -\frac{1}{5}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin 2x, \cos 2x$.

Bài tập 41. Cho $\tan\frac{\alpha}{2} = 2$. Tính $A = \frac{\cos\alpha + 3\sin\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha}\cdot$

Bài tập 42. Cho $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Tính $\sin 2a, \cos 4a, \cot\frac{a}{2}\cdot$

Bài tập 43. Tính :

a) $A = \sin 10^0 \sin 30^0 \sin 50^0 \sin 70^0$

b) $B = 5\sin 15^0 \cos 15^0 + \frac{\sin 45^0}{\sin^4 15^0 - \cos^4 15^0}$

c) $C = \tan^2\frac{\pi}{12} + \tan^2\frac{3\pi}{12} + \tan^2\frac{5\pi}{12}$

d) $\cos 72^0$.

Bài tập 44.

a) Chứng minh : $\tan^2 a + \tan^2(60^0 - a) + \tan^2(60^0 + a) = 6 + 9\tan^2 3a$

b) Tính : $S = \tan^2 5^0 + \tan^2 10^0 + \tan^2 15^0 + \cdots + \tan^2 80^0 + \tan^2 85^0$.

Bài tập 45. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \frac{1 + \sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$

b) $B = \frac{\tan\alpha + \sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

c) $C = 4\cos^4\alpha - 2\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha$

d) $D = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha$

e) $E = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha(\cot^2\alpha - \tan^2\alpha)}$

f) $F = \frac{\cos 4\alpha + 1}{\cot\alpha - \tan\alpha}$

g) $G = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}$

h) $H = \cos 3x\cos^3 x + \sin 3x\sin^3 x$.

Bài tập 46. Chứng minh :

a) $\frac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\tan 2\alpha - 1} = \cos 2\alpha$

b) $\cos^6\alpha - \sin^6\alpha = \frac{(3 + \cos^2 2\alpha)\cos 2\alpha}{4}$

c) $\frac{\cot\alpha + \tan\alpha}{1 + \tan 2\alpha\tan\alpha} = 2\cot 2\alpha$

d) $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \tan^2\frac{\alpha}{2}$

e) $\cos 4\alpha - \sin 4\alpha\cot 2\alpha = \cos 2\alpha - 2\cos^2\alpha$

f) $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

g) $\dfrac{1+\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

h) $\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos2\alpha}=\cot\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$

k) $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}{1-8\sin^2\alpha-\cos4\alpha}=\dfrac{1}{2}\cot^4\alpha.$

Bài tập 47. Chứng minh : $\tan1^0+\tan5^0+\tan9+\cdots+\tan173^0+\tan177^0=45.$

(Trích đề thi đề nghị HSG ĐBSCL 1999)

Bài tập 48. Giả sử $\alpha,\beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\begin{cases}3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1 & (1)\\ 3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0 & (2)\end{cases}$

Chứng minh : $\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{2}\cdot$

Bài tập 49. Giả sử α,β là các giá trị khác nhau của x thỏa mãn phương trình

$a\cos x+b\sin x=c, a^2+b^2\neq0.$ Chứng minh : $\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}\cdot$

Bài tập 50. Rút gọn : $S=\sin^3\dfrac{a}{3}+3\sin^3\dfrac{a}{3^2}+\cdots+3^{n-1}\sin^3\dfrac{a}{3^n}\cdot$

Bài tập 51.

a) Chứng minh : $\tan x=-2\cot2x+\cot x$

b) Rút gọn : $S=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{2^2}\tan\dfrac{a}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{a}{2^n}\cdot$

Bài tập 52.

a) Chứng minh : $\tan^2a\tan2a=\tan2a-2\tan a$

b) Rút gọn : $S=\tan^2\dfrac{x}{2}\tan x+2\tan^2\dfrac{x}{2^2}\tan\dfrac{x}{2}+\cdots+2^{n-1}\tan^2\dfrac{x}{2^n}\tan\dfrac{x}{2^{n-1}}\cdot$

Bài tập 53.

a) Chứng minh : $1+\dfrac{1}{\cos2a}=\dfrac{\tan2a}{\tan a}$

b) Rút gọn : $P=\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{\cos2x}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{\cos2^{n-1}x}\right)\cdot$

Bài tập 54.

a) Chứng minh : $2\cos a-1=\dfrac{2\cos2a-1}{2\cos a+1}$

b) Chứng minh : $(2\cos x-1)(2\cos2x-1)\cdots(2\cos2^{n-1}x-1)=\dfrac{2\cos2^nx+1}{2\cos x+1}\cdot$

CHỦ ĐỀ 8 : CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

Bài tập 55. Biến đổi tích thành tổng :

a) $A = 2\sin4\alpha\cos2\alpha$

b) $B = 2\cos3\alpha\cos5\alpha$

c) $C = 2\sin(3\alpha + 2\beta)\sin(\alpha - \beta)$

d) $D = \sin\dfrac{3x + y}{2}\cdot\cos\dfrac{3x - y}{2}$

e) $E = 4\sin\alpha\sin2\alpha\sin3\alpha.$

Bài tập 56. Biến đổi tổng thành tích :

a) $A = \sin(x + \alpha) - \sin x$

b) $B = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$

c) $C = \cos(2x + y) + \cos(x + 2y)$

d) $D = 1 + 2\cos x$

e) $E = \cos^2\alpha - \cos^2\beta$

f) $F = \sin x + \cos x + \sin2x + \cos2x + \sin3x + \cos3x$

g) $G = \sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta)$

h) $H = \cos2a + \cos2b + \sin2(a + b)$

k) $K = 1 - \cos x + \sin x.$

Bài tập 57. Cho $A + B + C = \pi$. Biến đổi tổng thành tích :

a) $\sin A - \sin B - \sin C$ **b)** $\cos A + \cos B - \cos C + 1.$

Bài tập 58. Tính :

a) $A = \cos10^0\cos50^0\cos70^0$

b) $B = \cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7}$

c) $C = \dfrac{\tan80^0}{\tan75^0 + \tan25^0} - \dfrac{\cot10^0}{\cot75^0 + \cot25^0}$

d) $D = \tan9^0 + \tan15^0 - \tan27^0 - \cot27^0 + \cot15^0 + \cot9^0$

e) $E = 2\cos\dfrac{\pi}{7} - \dfrac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{7}} - \left(\cos^2\dfrac{\pi}{7} - 3\sin^2\dfrac{\pi}{7}\right)$

f) $F = \cos\dfrac{2\pi}{15} + \cos\dfrac{4\pi}{15} - \cos\dfrac{7\pi}{15} - \cos\dfrac{\pi}{15}\cdot$

Bài tập 59. Chứng minh :

a) $\sin\alpha - \sin2\alpha + \sin3\alpha = 4\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}$

b) $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta = 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha + \beta)$

c) $\sin5\alpha + \sin3\alpha - 2\sin2\alpha\cos\alpha = 2\sin2\alpha\cos3\alpha$

d) $1-\cos(2x-\pi)-\cos(4x+\pi)+\cos(6x-2\pi)=4\cos x\cos 2x\cos 3x$

e) $\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{\sin 3x}{4}$

f) $\cos 6x\cos 2x+\sin 5x\sin 3x=\cos 3x\cos x$

g) $\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\right)\cos\alpha=\sin^2\alpha$

h) $\cos 10x+2\cos^2 4x+6\cos 3x\cos x-\cos x-8\cos x\cos^3 3x=1-\cos x.$

Bài tập 60. Chứng minh :

a) $9-8\sin 50^0=(1+4\sin 10^0)^2$

b) $\tan 30^0+\tan 40^0+\tan 50^0+\tan 60^0=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^0$

c) $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}\cdot$

Bài tập 61. Chứng minh :

a) $\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=-\tan\alpha$

b) $\frac{\sin 2x-\sin 3x+\sin 4x}{\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x}=\tan 3x$

c) $\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}+\frac{\sin(b-c)}{\cos b\cos c}+\frac{\sin(c-a)}{\cos c\cos a}=0$

d) $\frac{\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)}{\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c)}=\tan\frac{a+b}{2}\tan\frac{b+c}{2}\tan\frac{c+a}{2}\cdot$

Bài tập 62. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x :

a) $A=\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

b) $B=\cos^2 x-2\sin a\cos x\sin(a+x)+\sin^2(a+x)$

c) $C=u^2-2uv\sin(\alpha-\beta)+v^2$ (cho $u=\cos(x-\alpha)$, $v=\sin(x-\beta)$)

d) $D=\tan 2\alpha\tan\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\tan 2\alpha\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot$

Bài tập 63.

Chứng minh nếu $\cos\varphi=\cos a\cos b$ thì $\tan\frac{\varphi+a}{2}\tan\frac{\varphi-a}{2}=\tan^2\frac{b}{2}$

$\left(a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, b\neq(2n+1)\pi, k, n\in\mathbf{Z}\right)\cdot$

Bài tập 64. Chứng minh :

Nếu $\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)}=\frac{a}{b},\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}=\frac{A}{B}, aB+bA\neq 0$ thì $\cos(\alpha-\beta)=\frac{aA+bB}{aB+bA}\cdot$

Bài tập 65. Cho $\begin{cases}\cos x+\cos y=a\\ \sin x+\sin y=b\end{cases}$, $a, b \neq 0$. Tính giá trị của $\sin(x+y)$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

CHỦ ĐỀ 1 : KHÁI NIỆM GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC, DẤU CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC- TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Bài tập 1.

Số đo độ	-30^0	-150^0	135^0	-660^0	590^0
Số đo rađian	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$	$\frac{59\pi}{18}$

Bài tập 2.

a) $21^0 30' = \frac{21{,}5\pi}{180} \approx 0{,}375$ rad $75^0 54' = \frac{75{,}9\pi}{180} \approx 1{,}324$ rad

$18^0 = \frac{\pi}{10}$ rad $1845^0 = \frac{41\pi}{4}$ rad

b) $-\frac{8\pi}{3}$ rad $= -480^0$ $\frac{149\pi}{720}$ rad $= 37^0 15'$.

Bài tập 3.

- Nếu góc lượng giác có số đo α thì ta cần xác định số nguyên k để $0<\alpha+k2\pi \le 2\pi$, khi đó $\alpha+k2\pi$ là góc cần tìm

  + Với $\alpha=-\frac{\pi}{2}$ thì $k=1$, số dương bé nhất cần tìm là $\frac{3\pi}{2}\cdot$

  + Với $\alpha=\frac{30\pi}{7}$ thì $k=-2$, số dương bé nhất cần tìm là $\frac{2\pi}{7}\cdot$

- Nếu góc lượng giác có số đo a^0 thì ta cần xác định số nguyên k để $0<a^0+k360^0 \le 360^0$, khi đó a^0+k360^0 là góc cần tìm

+ Với $a^0=1000^0$ thì $k=-2$, số dương bé nhất cần tìm là 280^0.

Bài tập 4.

a) $19^0 30' + k.360^0 = 1819^0 30' \Rightarrow k=5 \in \mathbf{Z}$.

b) $19^0 30' + k.360^0 = 969^0 30' \Rightarrow k=\frac{950}{360} \notin \mathbf{Z}$

Do đó giá trị này không phải là số đo của (Ou, Ov).

Bài tập 5.

$|\alpha| \le 360^0 \Leftrightarrow -360^0 \le 40^0 + k.360^0 \le 360^0 \Leftrightarrow -\frac{400}{360} \le k \le \frac{320}{360}\cdot$

Vì $k \in \mathbf{Z}$ nên ta chọn : $k=-1, k=0$

$+ k=-1 : \alpha = 40^0 - 360^0 = -320^0$; $k=0 : \alpha = 40^0$.

Bài tập 6.

a) $A = 3$

b) $B = -6$

c) $C = \tan(360^0 + 60^0) + \sqrt{3}\sin(2.360^0 + 60^0) - 2\cos(4.360^0 + 30^0)$

$= \tan 60^0 + \sqrt{3}\sin 60^0 - 2\cos 30^0 = \sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$

d) $D = \dfrac{2(\tan 30^0 + \sin 60^0)\cos 60^0}{\cos 180^0 + \sin 270^0} = \dfrac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{-1 - \sin 90^0} = \dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{6}}{-2} = -\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\cdot$

Bài tập 7.

a) Vì $180^0 < 232^0 < 270^0 \Rightarrow \cos 232^0 < 0$

b) $\begin{cases} \cos 238^0 < 0 \quad (\text{do } 180^0 < 238^0 < 270^0) \\ \tan 136^0 < 0 \quad (\text{do } 90^0 < 136^0 < 180^0\ ) \end{cases} \Rightarrow \cos 238^0 \tan 136^0 > 0$

c) $\begin{cases} \cot\frac{2\pi}{5} > 0 & \left(\text{do } 0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right) < 0 & \left(\text{do } -\pi < -\frac{3\pi}{5} < -\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \cot\frac{2\pi}{5}\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right) < 0$

d) Vì $0^0 < \alpha < 90^0 \Rightarrow 270^0 > 270^0 - \alpha > 180^0 \Rightarrow \sin(270^0 - \alpha) < 0.$

CHỦ ĐỀ 2 : HỆ THỨC CƠ BẢN

Bài tập 8.

a) • Tính $\cos\alpha$: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

• Tính $\tan\alpha$: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

• Tính $\cot\alpha$: $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 2\sqrt{2}.$

b) • Tính $\cos\alpha$: $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ \left(\text{do } -\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}\right)$

• Tính $\sin\alpha$: $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

• Tính $\cot\alpha$: $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{2}\cdot$

Bài tập 9.

• Tính $\cos\alpha$: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{576}{625} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{24}{25}$

• Tính cotα : $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\dfrac{24}{7}$

• Do đó : $A = \dfrac{17}{31}\cdot$

Bài tập 10.

+ Vì $\tan\alpha = -2 \Rightarrow \cos\alpha \neq 0$

+ Ta chia tử và mẫu của A cho $\cos\alpha \neq 0$, ta được : $A = \dfrac{3\tan\alpha + 2}{1 - 2\tan\alpha} = -\dfrac{4}{5}$

Bài tập 11.

a) $A = \sin^2 a(1 + \tan^2 a) = \sin^2 a \cdot \dfrac{1}{\cos^2 a} = \tan^2 a.$

b) $B = \dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a - 2\sin^2 a}{\sin a + \cos a} = \dfrac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a + \cos a} = \cos a - \sin a.$

c) $C = \sin^2 a + \sin^2 a \cot a + \cos^2 a + \cos^2 a \tan a = \sin^2 a + 2\sin a \cos a + \cos^2 a$

$= (\sin a + \cos a)^2.$

d) $D = \dfrac{\sqrt{1+\cos a}}{\sqrt{1-\cos a}} + \dfrac{\sqrt{1-\cos a}}{\sqrt{1+\cos a}} = \dfrac{1 + \cos a + 1 - \cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}} = \dfrac{2}{|\sin a|}\cdot$

e) $E = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}\left[1 - \dfrac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\right] = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}\cdot\left(1 - \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$

$= \dfrac{2\cos x}{\sin x} = 2\cot x.$

f) $F = \dfrac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{1 - \sin\alpha - 1 - \sin\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)} = \dfrac{2\sin\alpha - 2\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0.$

Bài tập 12.

a) $VT = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2 x - (1 - \sin^2 x)$ (đpcm).

b) $VT = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \dfrac{\cos^2 x(1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} = \cot^2 x \cos^2 x$ (đpcm).

c) $VT = \sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} + 2\sin x \cdot \dfrac{1}{\sin x} + \cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x \cdot \dfrac{1}{\cos x} -$
$\tan^2 x - \cot^2 x$

$= 5 + (1 + \cot^2 x) + (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x - \cot^2 x = 7$ (đpcm).

d) $VT = \dfrac{\sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha) - \cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$

$= \dfrac{\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{\tan^2\alpha + 1}{\tan^2\alpha - 1}$ (đpcm).

e) $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{1-\cos x}=\dfrac{2\cos x}{\sin x-\cos x+1}\Leftrightarrow\dfrac{\sin x+(\cos x-1)}{1-\cos x}=\dfrac{2\cos x}{\sin x-(\cos x-1)}$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-(\cos x-1)^2=2\cos x(1-\cos x)$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-(\cos^2 x-2\cos x+1)=2\cos x-2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=1$ (đúng) $\Rightarrow$ đpcm.

f) $VT=\cos x\left[(1+\tan x)+\dfrac{1}{\cos x}\right]\cdot\left[(1+\tan x)-\dfrac{1}{\cos x}\right]$

$=\cos x\left[(1+\tan x)^2-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right]=\cos x.(2\tan x)=2\sin x$ (đpcm).

g) $VT=\dfrac{\sin x}{\sin^3 x}+\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\cot x\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)=1+\cot^2 x+\cot x(1+\cot^2 x)$

$\Rightarrow$ đpcm.

h) $VT=\dfrac{\cos x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}-\sin x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}}=\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}$

$=\dfrac{(\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x)}{\cos x-\sin x}=1+\cos x\sin x$ (đpcm).

k) $VT=\left(\dfrac{\cos x+\tan x}{1+\cos x\cdot\dfrac{1}{\tan x}}\right)^2=\tan^2 x;\quad VP=\dfrac{\cos^2 x+\tan^2 x}{1+\cos^2 x\cdot\dfrac{1}{\tan^2 x}}=\tan^2 x$

So sánh hai vế $\Rightarrow$ đpcm.

Bài tập 13.

a) + Đặt $\begin{cases}a=\sin^2 x\\ b=\cos^2 x\end{cases}\Rightarrow a+b=1.$

$+\ A=\dfrac{a^2+b^2-1}{a^3+b^3-1}=\dfrac{(a+b)^2-2ab-1}{(a+b)^3-3ab(a+b)-1}=\dfrac{1-2ab-1}{1-3ab-1}=\dfrac{2}{3}$ (đpcm).

b) + Đặt $\begin{cases}a=\sin^2 x\\ b=\cos^2 x\end{cases}\Rightarrow a+b=1.$

$+\ B=\dfrac{1}{4ab}-\dfrac{\left(1-\dfrac{b}{a}\right)^2}{\dfrac{4b}{a}}=\dfrac{1}{4ab}-\dfrac{(a-b)^2}{a^2}\cdot\dfrac{a}{4b}=\dfrac{1-[(a+b)^2-4ab]}{4ab}$

$=\dfrac{1-1+4ab}{4ab}=1$ (đpcm).

c) $C = \sqrt{\dfrac{1-\sin x+1+\sin x}{1-\sin^2 x}}\cdot\cos x = \sqrt{\dfrac{2}{\cos^2 x}}\cdot\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{-\cos x}\cdot\cos x$

$= -\sqrt{2}\ \left(\text{do } \dfrac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ (đpcm).

d) + Đặt $\begin{cases} a = \sin^2 x \\ b = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow a + b = 1.$

$+ D = 3(1-2b)(a^2+b^2) + 4(b^3 - 2a^3) + 6a^2$

$= 3a^2 - 6a^2b + 3b^2 - 6b^3 + 4b^3 - 8a^3 + 6a^2$

$= 3a^2 + 3b^2 + 6a^2(1-b) - 2b^3 - 8a^3$

$= 3(a^2+b^2) - 2(a^3+b^3)$ (do $1 - b = a$)

$= 3(1-2ab) - 2(1-3ab) = 1$ (đpcm).

e) Đặt $\begin{cases} a = \sin^2 x \\ b = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow a + b = 1.$ Ta có:

$E = \dfrac{a^4 - b^4}{8} - \dfrac{a^3 - b^3}{6} - \dfrac{a^3}{6} + \dfrac{a^2}{4}$

$= \dfrac{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}{8} - \dfrac{(a-b)(a^2+b^2+ab)}{6} - \dfrac{a^3}{6} + \dfrac{a^2}{4}$

$= \dfrac{-(a-b)(a^2+b^2+4ab) - 4a^3 + 6a^2}{24}$

$= \dfrac{-(2a-1)[1+2a(1-a)] - 4a^3 + 6a^2}{24}$ (do $b = 1 - a$)

$= \dfrac{(1-2a)(-2a^2+2a+1) - 4a^3 + 6a^2}{24} = \dfrac{1}{24}$ (đpcm).

Bài tập 14.

Đặt $\begin{cases} a = \sin^2 x \\ b = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow a + b = 1.$

$A = m(a^3+b^3) + 2(a^2+b^2) = m[(a+b)^3 - 3ab(a+b)] + 2[(a+b)^2 - 2ab]$

$= m(1-3ab) + 2(1-2ab) = m + 2 - ab(3m+4)$

Yêu cầu bài toán ta phải có: $3m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{3}\cdot$

Bài tập 15.

Đặt $\begin{cases} u = \sin^2 x \\ v = \cos^2 x \end{cases}$. Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} u + v = 1 & (1) \\ \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{v^2}{3} = \dfrac{1}{5} & (2) \end{cases}$

Từ $(1) \Rightarrow u = 1 - v$ (3)

Thế (3) vào (2): $\dfrac{(1-v)^2}{2}+\dfrac{v^2}{3}=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow 15(1-2v+v^2)+10v^2=6$

$\Leftrightarrow 25v^2-30v+9=0\Rightarrow v=\dfrac{3}{5};\quad (3)\Rightarrow u=\dfrac{2}{5}$

Do đó: $\dfrac{\sin^8x}{8}+\dfrac{\cos^8x}{27}=\dfrac{u^4}{8}+\dfrac{v^4}{27}=\dfrac{1}{125}\cdot$

CHỦ ĐỀ 3: GÓC (CUNG) LIÊN KẾT

Bài tập 16.

- $\cos120^0=\cos(180^0-60^0)=-\cos60^0=-\dfrac{1}{2}$
- $\cos\dfrac{49\pi}{6}=\cos\left(\dfrac{49\pi}{6}-8\pi\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(-\dfrac{16\pi}{3}\right)=-\sin\left(-\dfrac{16\pi}{3}+5\pi\right)=-\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan570^0=\tan(570^0-3.180^0)=\tan30^0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot$

Bài tập 17.

a) $A=\tan(-x)+\tan x-\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\tan x+\tan x-\cot x=-\cot x$

b) $B=-\tan x+\cot\left(x+\dfrac{3\pi}{2}-\pi\right)-\cot\left(x-\dfrac{5\pi}{2}+3\pi\right)+\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

$=-\tan x-\tan x+\tan x+\tan x=0$

c) $C=\left[\sin(-\alpha)-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\pi-\alpha\right)\right]^2-\left[-\cos(-\alpha)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2$

$=\left[\sin(-\alpha)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2-(-\cos\alpha-\sin\alpha)^2$

$=(-\sin\alpha-\cos\alpha)^2-(-\cos\alpha-\sin\alpha)^2=0.$

Bài tập 18.

a) • $\tan236^0=\tan(180^0+56^0)=\tan56^0=\cot34^0$

- $\cos416^0=\cos(360^0+56^0)=\cos56^0=\sin34^0$
- $\cos326^0=\cos(360^0-34^0)=\cos(-34^0)=\cos34^0$
- $\cot71^0=\tan19^0$

$A=2\cot34^0\tan34^0-\tan19^0\cot19^0=2-1=1.$

b) • $\tan188^0=\tan(180^0+8^0)=\tan8^0$

- $\sin2550^0=\sin(30^0+7.360^0)=\sin30^0=1/2$

• $\sin 98^0 = \sin(90^0 + 8^0) = \cos 8^0$

• $\cos 638^0 = \cos(720^0 - 82^0) = \cos(-82^0) = \cos 82^0 = \sin 8^0$

• $\sin 188^0 = \sin(180^0 + 8^0) = -\sin 8^0$

$$B = \frac{1}{\tan 8^0} - \frac{\cos 8^0}{2\sin 8^0 - \sin 8^0} = \cot 8^0 - \cot 8^0 = 0.$$

Bài tập 19.

Vì A, B, C là ba góc của tam giác ABC nên $A + B + C = \pi$

a) $\tan\left(\frac{A+B-2C}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi - 3C}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right) = \cot\frac{3C}{2}$

b) $\cos(A + B - 3C) = \cos(\pi - 4C) = -\cos 4C.$

CHỦ ĐỀ 4: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài tập 20.

a) $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

b) y xác định khi $3x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

c) y xác định khi $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \neq k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x \neq -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

d) y xác định khi $\frac{5x}{x^2 - 1}$ xác định $\Leftrightarrow x \neq \pm 1.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.

e) y xác định khi $\sin x \geq 0 \Leftrightarrow k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D} = [k2\pi; \pi + k2\pi], k \in \mathbf{Z}.$

f) y xác định khi $\cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D} = \left[\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{5\pi}{3} + k2\pi\right], k \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 21.

a) Hàm số lẻ.

b) Hàm số chẵn.

c) Hàm số đã cho không chẵn, không lẻ.

d) Tập xác định $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

Ta có: $\begin{cases} \forall x \in \mathbf{D} \Rightarrow -x \in \mathbf{D} \\ f(-x) = |\tan(-x)| = |-\tan x| = |\tan x| = f(x) \end{cases} \Rightarrow$ f là hàm số chẵn.

e) Hàm số chẵn.

f) y xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x + \tan x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

Tập xác định $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

Ta có: $\begin{cases} \forall x \in \mathbf{D} \Rightarrow -x \in \mathbf{D} \\ f(-x) = \dfrac{2(-x)^4}{\sin(-x) + \tan(-x)} = -\dfrac{2x^4}{\sin x + \tan x} = -f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ f là hàm số lẻ.

g) Gọi $f(x) = \dfrac{\cos x + \tan x}{\sin x}, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Do $f(-x) \neq \pm f(x)$ nên hàm số đã cho không chẵn, không lẻ

Chẳng hạn: $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \neq \pm f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}\cdot$

h) Hàm số lẻ.

Bài tập 22.

a) Chu kì của hàm số cần tìm là $T = \dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi.$

b) • $\sin 2x$ có chu kì là π ; $\cos\frac{x}{2}$ có chu kì là 4π

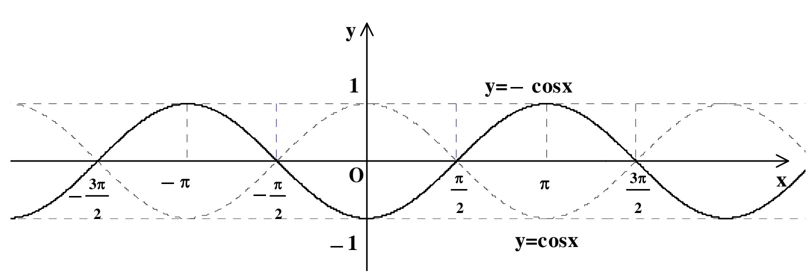
•Suy ra: $y = 2\sin 2x + \cos\frac{x}{2}$ có chu kì là 4π.

c) $y = \sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$ có chu kì là $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\cdot$

d) $y = 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ có chu kì là $\frac{2\pi}{2} = \pi.$

Bài tập 23.

a)



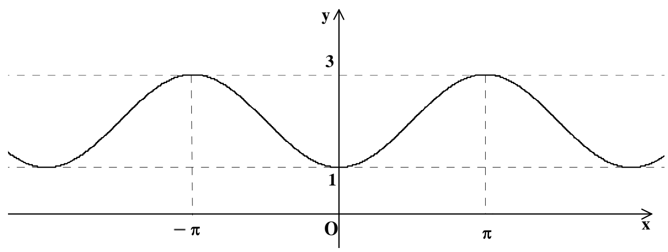
• Vẽ đồ thị y = cosx (đã vẽ ở phần Kiến thức cần nhớ)

• Đối xứng đồ thị y = cosx qua trục hoành.

b) Để vẽ đồ thị y = 2 – cosx ta tiến hành các bước sau :

• Vẽ đồ thị y = –cosx (đã vẽ ở câu a)

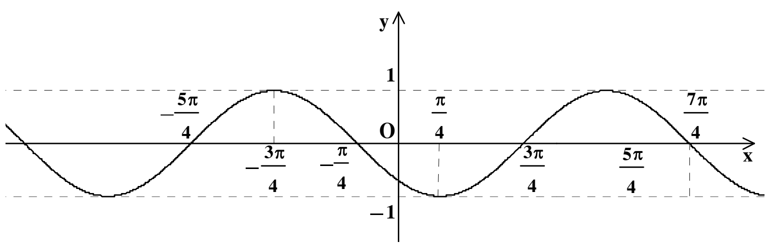
• Tịnh tiến đồ thị y = –cosx theo trục Oy lên phía trên một đoạn có độ dài bằng 2.



c) Để vẽ đồ thị $y = -\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ ta tiến hành các bước sau :

• Vẽ đồ thị y = –cosx (đã vẽ ở câu a)

• Tịnh tiến đồ thị y = –cosx sang phải theo trục Ox một đoạn có độ dài bằng $\dfrac{\pi}{4}$·



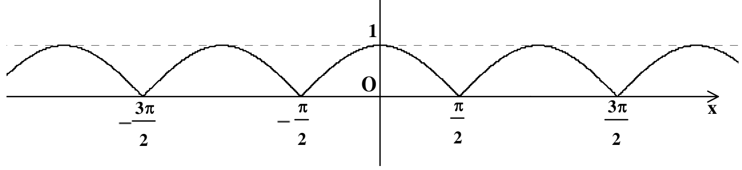
d) Ta có : $|\cos x| = \begin{cases} \cos x \text{ nếu } \cos x \geq 0 \\ -\cos x \text{ nếu } \cos x < 0 \end{cases}$

Để vẽ đồ thị y = |cosx| ta tiến hành các bước sau :

• Vẽ đồ thị y = cosx (đã vẽ ở phần Kiến thức cần nhớ)

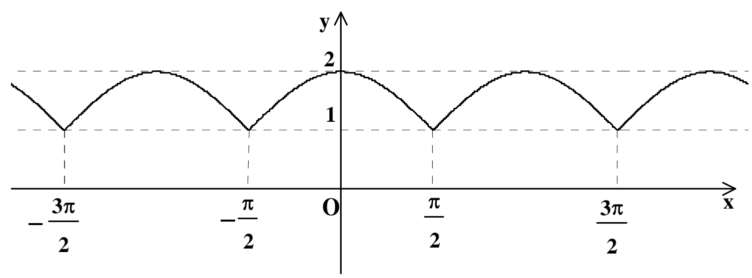
• Giữ nguyên phần đồ thị y = cosx ở phía trên trục hoành x′Ox

• Lấy đối xứng của đồ thị y = cosx ở phía dưới trục hoành x′Ox qua trục x′Ox; bỏ phần đồ thị y = cosx phía dưới trục x′Ox.



e) Để vẽ đồ thị $y = 1 + |\cos x|$ ta tiến hành các bước sau :

- Vẽ đồ thị $y = |\cos x|$ (đã vẽ ở câu d)
- Tịnh tiến đồ thị $y = |\cos x|$ theo trục Oy lên phía trên một đoạn có độ dài bằng 1.



f) Vẽ đồ thị $y = 1 - |\cos x|$ (học sinh tự lí luận).

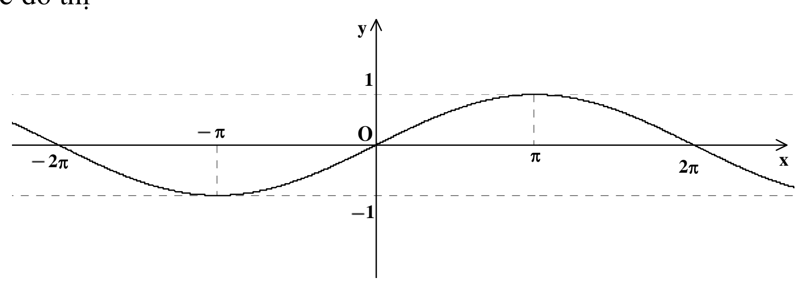
Bài tập 24.

a) $f(x + k4\pi) = \sin\left(\frac{x + k4\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + k2\pi\right) = \sin\frac{x}{2} = f(x).$

b) Bảng biến thiên

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
$\frac{x}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\frac{x}{2}$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	0	$1 \searrow$	0

c) Vẽ đồ thị



Bài tập 25.

a) Ta có: $-1 \le \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1, \forall x \Rightarrow -2 \le 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 2, \forall x \Rightarrow -3 \le y \le 1$

Vậy $\min y = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$

$\max y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$

b) Ta có: $0 \le 1 + \sin x \le 2 \Rightarrow 0 \le \sqrt{1 + \sin x} \le \sqrt{2} \Rightarrow -5 \le y \le \sqrt{2} - 5$

Vậy $\min y = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$

$\max y = \sqrt{2} - 5 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$

CHỦ ĐỀ 5 : TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC BẰNG CÁCH DỰA VÀO PHƯƠNG TRÌNH

Bài tập 26.

Ta có : $\frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{5\pi}{7}$ là ba nghiệm của phương trình $\cos 3x + \cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow (4\cos^3 x - 3\cos x) + (8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(8\cos^3 x - 4\cos^2 x - 4\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 8\cos^3 x - 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$ (do $1 + \cos x \neq 0$)

$$\bullet\ T = \frac{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}} = 4$$

(Áp dụng định lí Vi - ét).

Bài tập 27.

Ta có : $\cos 4\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \cos 3\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ vì cùng bằng $\cos\left(2\pi - \frac{6\pi}{7}\right)$

$\cos 4\left(\frac{4\pi}{7}\right) = \cos 3\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ vì cùng bằng $\cos\left(4\pi - \frac{12\pi}{7}\right)$

$\cos 4\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \cos 3\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ vì cùng bằng $\cos\left(6\pi - \frac{18\pi}{7}\right)$

Suy ra : $\frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}; \frac{6\pi}{7}$ là ba nghiệm của phương trình $\cos 4x = \cos 3x$

$\Leftrightarrow (8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) - (4\cos^3 x - 3\cos x) = 0$

$\Rightarrow 8t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0$ (1)

(với $t = \cos x \neq 1$). Gọi $y \in \left\{\cos^2\frac{\pi}{7}; \cos^2\frac{2\pi}{7}; \cos^2\frac{3\pi}{7}\right\}$

Mặt khác

$2\cos^2\frac{\pi}{7} = 1 + \cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos^2\frac{2\pi}{7} = 1 + \cos\frac{4\pi}{7}$, $2\cos^2\frac{3\pi}{7} = 1 + \cos\frac{6\pi}{7}$

$\Rightarrow 2y = 1 + t \Rightarrow t = 2y - 1$

(1) $\Leftrightarrow 64y^3 - 80y^2 + 24y - 1 = 0$ (2)

Gọi y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của (2)

Ta có: $E = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (y_1 + y_2 + y_3)^2 - 2(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1)$

$$= \left(-\frac{-80}{64}\right)^2 - 2\left(\frac{24}{64}\right) = \frac{13}{16}.$$

CHỦ ĐỀ 6 : CÔNG THỨC CỘNG

Bài tập 28.

- Tính $\cos\alpha$: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$
- Tính $\sin\beta$: $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = \frac{25}{169} \Rightarrow \sin\beta = \frac{5}{13}$
- Tính $\sin(\alpha+\beta)$: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{16}{65}.$

Bài tập 29.

a) $A = \cos[(\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)] = \cos 2\alpha.$

b) $B = \tan[(\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)] = \tan 2\beta.$

c) $C = 1 - \sin^2(\alpha-\beta) = \cos^2(\alpha-\beta).$

d) $D = \left(1 + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}\right)\cdot\sin 2\beta = \frac{\cos 2\beta\cos\beta + \sin 2\beta\sin\beta}{\cos 2\beta\cos\beta}.\sin 2\beta$

$$= \frac{\cos(2\beta-\beta)}{\cos\beta\cos 2\beta}.\sin 2\beta = \tan 2\beta.$$

Bài tập 30.

a) $A = \frac{3}{2}\left(\sin 15^0 + \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0}\cdot\cos 15^0\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{\sin 15^0\cos 30^0 + \sin 30^0\cos 15^0}{\cos 30^0}\right)$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 45^0}{\cos 30^0} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b) $B = \frac{\sin 45^0\cos 15^0 + \cos 45^0\sin 15^0}{\sin 45^0\cos 15^0 - \cos 45^0\sin 15^0} = \frac{\sin 60^0}{\sin 30^0} = \sqrt{3}.$

c) $C = \dfrac{\cos\frac{\pi}{18} - \sqrt{3}.\cos\frac{4\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}} = \dfrac{4\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\right)}{2\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{18}}$

$$= \dfrac{4\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18} - \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{4\pi}{9}\right)}{\sin\frac{\pi}{9}} = \dfrac{4\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{18}\right)}{\sin\frac{\pi}{9}} = 4.$$

Chú ý: $\cos\frac{4\pi}{9} = \sin\frac{\pi}{18}$

Bài tập 31.

a) VT $= \dfrac{1+\dfrac{\cos a\cos b}{\sin a\sin b}}{1-\dfrac{\cos a\cos b}{\sin a\sin b}} = -\dfrac{\cos a\cos b+\sin a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b} = -\dfrac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)}$ (đpcm).

b) VT $= \dfrac{(\tan\alpha-\tan\beta)}{(1+\tan\alpha\tan\beta)}\cdot\dfrac{(\tan\alpha+\tan\beta)}{(1-\tan\alpha\tan\beta)} = \tan(\alpha-\beta)\tan(\alpha+\beta)$ (đpcm).

c) VT $= \dfrac{(\cos a\cos b+\sin a\sin b)(\cos a\cos b-\sin a\sin b)}{1-\dfrac{\cos^2 a}{\sin^2 a}\cdot\dfrac{\cos^2 b}{\sin^2 b}}$

$= \dfrac{(\cos a\cos b+\sin a\sin b)(\cos a\cos b-\sin a\sin b)}{\dfrac{\sin^2 a\ \sin^2 b-\cos^2 a\cos^2 b}{\sin^2 a\sin^2 b}} = -\sin^2 a\sin^2 b$ (đpcm).

d) VT $= \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}} - \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}} = 1-\tan\alpha\tan\beta-(1+\tan\alpha\tan\beta)$

$= -2\tan\alpha\tan\beta$ (đpcm).

Bài tập 32.

Ta có: $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b} = 1 \Rightarrow a+b = \dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$

Do $a, b\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow a+b\in(0;\pi) \Rightarrow k=0$. Vậy $a+b=\dfrac{\pi}{4}\cdot$

Bài tập 33.

Ta có: $A = \dfrac{\tan\alpha-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\cdot\tan\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}$

• Tính $\sin\alpha$: $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \dfrac{1600}{1681} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{40}{41}$

• Tính $\tan\alpha$: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{40}{9}$

Do đó: $A = \dfrac{49}{31}\cdot$

Bài tập 34.

• $\sin(a+2b) = \sin[(a+b)+b] = \sin(a+b)\cos b+\cos(a+b)\sin b$

$= \sin(a+b)\cos b$ (1) (do $\cos(a+b)=0$)

• $\sin a = \sin[(a+b)-b] = \sin(a+b)\cos b-\cos(a+b)\sin b$

$= \sin(a+b)\cos b$ (2)

(do $\cos(a+b)=0$). Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm.

Bài tập 35.

a) $A=\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)\cdot\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)-\cos^2x$

$=\sin^2\frac{\pi}{3}\cos^2x-\cos^2\frac{\pi}{3}\sin^2x-\cos^2x=\frac{3}{4}\cos^2x-\frac{1}{4}\sin^2x-\cos^2x$

$=-\frac{1}{4}(\sin^2x+\cos^2x)=-\frac{1}{4}$ (đpcm)$\cdot$

b) $B=\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)^2$

$+\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin x\right)^2+\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos x-\sin\frac{2\pi}{3}\sin x\right)^2-2\sin^2x$

$=2\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2x+2\sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2x+2\cos^2\frac{2\pi}{3}\cos^2x+2\sin^2\frac{2\pi}{3}\sin^2x-2\sin^2x$

$=\sin^2x+\cos^2x=1$ (đpcm).

Bài tập 36.

$\cos(x+y)=\frac{\cos(x-y)}{3}\Leftrightarrow 3(\cos x\cos y-\sin x\sin y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$\Leftrightarrow 2\cos x\cos y=4\sin x\sin y\Rightarrow \tan x\tan y=\frac{1}{2}\cdot$

Bài tập 37.

a) Vì A, B, C là ba góc của tam giác ABC, nên $B+C=\pi-A$

Ta có: $VT=-\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=-\sin\frac{A}{2}\cdot$

b) Vì A, B, C là ba góc của tam giác ABC, nên $B=\pi-(A+C)$

Ta có: $VT=\sin(A-C)-\sin(A+C)$

$=\sin A\cos C-\cos A\sin C-(\sin A\cos C+\cos A\sin C)$

$=-2\cos A\sin C.$

c) Vì A, B, C là ba góc của tam giác ABC nên $A+B=\pi-C$

Ta có: $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)\Rightarrow\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C\Rightarrow$ đpcm.

Bài tập 38.

$(2)\Rightarrow(a\cos\alpha\cos\varphi-a\sin\alpha\sin\varphi)+(b\cos\beta\cos\varphi-b\sin\beta\sin\varphi)=0$

$\Leftrightarrow(a\cos\alpha+b\cos\beta)\cos\varphi-(a\sin\alpha+b\sin\beta)\sin\varphi=0$

Vì $\begin{cases}\varphi\neq k\pi\\ a\cos\alpha+b\cos\beta=0\end{cases}\Rightarrow a\sin\alpha+b\sin\beta=0$

Do đó: $VT=(a\cos\alpha+b\cos\beta)\cos x-(a\sin\alpha+b\sin\beta)\sin x=0$ (đpcm).

Bài tập 39.

Đặt $a=\tan\alpha$, $b=\tan\beta$, $c=\tan\gamma$ đề đã cho viết lại :

$\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)=\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)$

Sử dụng bài tập 37 c), suy ra điều phải chứng minh.

CHỦ ĐỀ 7 : CÔNG THỨC NHÂN

Bài tập 40.

- $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-\dfrac{1}{25}=\dfrac{24}{25} \Rightarrow \cos x = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$
- $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\left(-\dfrac{1}{5}\right)\left(-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)=\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$
- $\cos 2x = 1-2\sin^2 x = 1-\dfrac{2}{25}=\dfrac{23}{25}\cdot$

Bài tập 41.

Đặt $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}=2$. Ta có : $A=\dfrac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}}{2\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}-\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{-t^2+6t+1}{-2t^2-2t+2}=-\dfrac{9}{10}\cdot$

Bài tập 42.

- $\sin a+\cos a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\Rightarrow 1+2\sin a\cos a=\dfrac{7}{4}\Rightarrow \sin 2a=\dfrac{3}{4}$
- $\cos 4a = 1-2\sin^2 2a = -\dfrac{1}{8}$
- $\sin a+\cos a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\Leftrightarrow \dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\Leftrightarrow (\sqrt{7}+2)t^2-4t+\sqrt{7}-2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{\sqrt{7}+2} \\ t=\dfrac{1}{\sqrt{7}+2}\end{array}\right. \quad \left(\text{với } t=\tan\dfrac{a}{2}\right)$$

Vậy $\cot\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{a}{2}}=\dfrac{\sqrt{7}+2}{3}$; $\cot\dfrac{a}{2}=\sqrt{7}+2$.

Bài tập 43.

a) $(16\cos 10^0)A=(16\cos 10^0\sin 10^0)\sin 70^0\sin 50^0\sin 30^0$

$$=8\sin 20^0\cos 20^0\cos 40^0\cdot\frac{1}{2}$$

$$=2\sin 40^0\cos 40^0=\sin 80^0=\cos 10^0$$

$\Rightarrow A=\dfrac{1}{16}$

b) $B=\dfrac{5}{2}\sin30^0+\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\sin^2 15^0-\cos^2 15^0)\cdot(\sin^2 15^0+\cos^2 15^0)}$

$$=\frac{5}{4}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\cos30^0}=\frac{5}{4}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{15-4\sqrt{6}}{12}\cdot$$

c) • $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}.$

• $\tan\dfrac{3\pi}{12}=1;\quad \tan\dfrac{5\pi}{12}=\cot\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

$\Rightarrow C=(2-\sqrt{3})^2+1+\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^2}=15.$

d) Ta có : $\cos3.(18^0)=\sin2.(18^0)\Leftrightarrow 4\cos^3 18^0-3\cos18^0=2\sin18^0\cos18^0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 18^0-3=2\sin18^0\ \left(\text{do}\cos18^0\neq0\right)$

$\Leftrightarrow 4(1-\sin^2 18^0)-3=2\sin18^0\Leftrightarrow 4\sin^2 18^0+2\sin18^0-1=0$

$\Rightarrow \sin18^0=\cos72^0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot$

Bài tập 44.

a) $VT=\tan^2 a+\left(\dfrac{\tan60^0-\tan a}{1+\tan60^0\tan a}\right)^2+\left(\dfrac{\tan60^0+\tan a}{1-\tan60^0\tan a}\right)^2$

$$=\tan^2 a+\left(\frac{\sqrt{3}-\tan a}{1+\sqrt{3}.\tan a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+\tan a}{1-\sqrt{3}.\tan a}\right)^2$$

$$=\frac{\tan^2 a(1-3\tan^2 a)^2+(\sqrt{3}-\tan a)^2(1-\sqrt{3}\tan a)^2+(\sqrt{3}+\tan a)^2(1+\sqrt{3}\tan a)^2}{(1-3\tan^2 a)^2}$$

$$=\frac{9\tan^6 a+45\tan^2 a+6}{(1-3\tan^2 a)^2}=\frac{9\tan^2 a.(3-\tan^2 a)^2+6(1-3\tan^2 a)^2}{(1-3\tan^2 a)^2}$$

$$=9\left(\frac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}\right)^2+6=9\tan^2 3a+6$$

b) Thế lần lượt $a=5^0,\ 10^0,15^0,20^0,25^0$ vào biểu thức ở câu a

Ta có : $\tan^2 5^0+\tan^2 55^0+\tan^2 65^0=6+9\tan^2 15^0$ (1)

$\tan^2 10^0+\tan^2 50^0+\tan^2 70^0=6+9\tan^2 30^0$ (2)

$\tan^2 15^0+\tan^2 45^0+\tan^2 75^0=6+9\tan^2 45^0$ (3)

$\tan^2 20^0+\tan^2 40^0+\tan^2 80^0=6+9\tan^2 60^0$ (4)

$$\tan^2 25^0 + \tan^2 35^0 + \tan^2 85^0 = 6 + 9\tan^2 75^0 \qquad (5)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) ,(4) và (5). Ta được:

$$S = \tan^2 30^0 + \tan^2 60^0 + 30$$

$$+ 9(\tan^2 15^0 + \tan^2 30^0 + \tan^2 45^0 + \tan^2 60^0 + \tan^2 75^0)$$

$$= 10\tan^2 30^0 + 10\tan^2 60^0 + 30 + 9(\tan^2 15^0 + \tan^2 45^0 + \tan^2 75^0)$$

$$= \frac{10}{3} + 30 + 30 + 9(6 + 9\tan^2 45^0) = \frac{595}{3}\cdot$$

Bài tập 45.

a) $A = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}{(\sin x + \cos x)^2} = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = 1.$

b) $B = \dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \sin\alpha}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{2\cos\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\sin\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \tan\alpha.$

c) $C = 4\left(\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 - 2\cos 2\alpha - \dfrac{1}{2}(2\cos^2 2\alpha - 1)$

$$= 1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cdot$$

d) $D = \dfrac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\cdot\tan^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha = \cot^2\dfrac{\alpha}{2}\tan^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha$

$$= 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

e) $E = \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\cdot\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\cdot\dfrac{(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{4\sin^2 2\alpha\cdot\dfrac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}} = \frac{\cos 2\alpha}{4\sin^2 2\alpha\cdot\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}} = \frac{1}{4}\cdot$$

f) $F = \dfrac{2\cos^2 2\alpha}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{2\cos^2 2\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}} = \dfrac{\cos^2 2\alpha\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{1}{2}\sin 4\alpha.$

g) $G = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$

$$= \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = 1.$$

h) $H=\cos3x\cdot\dfrac{3\cos x+\cos3x}{4}+\sin3x\cdot\dfrac{3\sin x-\sin3x}{4}$

$=\dfrac{3}{4}(\cos3x.\cos x+\sin3x.\sin x)+\dfrac{1}{4}(\cos^2 3x-\sin^2 3x)$

$=\dfrac{3}{4}\cos2x+\dfrac{1}{4}\cos6x=\dfrac{3}{4}\cos2x+\dfrac{1}{4}(4\cos^3 2x-3\cos2x)=\cos^3 2x.$

Bài tập 46.

a) $VT=\dfrac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\sin2\alpha}{\dfrac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}-1}=\dfrac{-\cos2\alpha+\sin2\alpha}{\dfrac{\sin2\alpha-\cos2\alpha}{\cos2\alpha}}$

$=\cos2\alpha$ (đpcm).

b) $VT=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+\cos^2\alpha.\sin^2\alpha)$

$=\cos2\alpha\left(1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha+\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right)=\cos2\alpha\left(1-\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right)$

$=\cos2\alpha\left[1-\dfrac{1}{4}(1-\cos^2 2\alpha)\right]=VP.$

c) $VT=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{\dfrac{2}{\sin2\alpha}}{\dfrac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\cos2\alpha\cos\alpha}}=2\cot2\alpha$ (đpcm).

d) $VT=\dfrac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$ (đpcm).

e) $VT=\dfrac{\cos4\alpha\sin2\alpha-\sin4\alpha\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\dfrac{\sin(2\alpha-4\alpha)}{\sin2\alpha}=-\dfrac{\sin2\alpha}{\sin2\alpha}=-1$

$VP=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha=-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=-1=VT.$

f) $VT=\dfrac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha).(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\left(2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=VP.$

g) $VT=\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\dfrac{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$ (đpcm).

h) $VT=\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cot\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$ (đpcm).

$\left(\text{do}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}\right)$

k) $VT=\frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4(1-\sin^2\alpha)}{(1-\cos4\alpha)-8\sin^2\alpha}=\frac{-4\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}{-8\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}=\frac{\cos^4\alpha}{2\sin^4\alpha}$

$=\frac{1}{2}\cot^4\alpha$ (đpcm).

Bài tập 47.

Áp dụng : $\tan a+\tan(a+60^0)+\tan(a+120^0)=3\tan3a$ cho 15 lần

với $a=1^0+k.4^0$ $(k=0,1,...,14)$

Ta có :

$$\tan1^0+\tan61^0+\tan121^0=3\tan3^0 \qquad (1)$$

$$\tan5^0+\tan65^0+\tan125^0=3\tan15^0 \qquad (2)$$

$$...$$

$$\tan57^0+\tan117^0+\tan177^0=3\tan171^0 \qquad (15)$$

Cộng (1), (2), ..., (15) vế theo vế, ta được :

$S=9(\tan9^0+\tan45^0+\tan81^0+\tan117^0+\tan153^0)$

$=9(\tan9^0+\tan81^0-\tan63^0-\tan27^0)+9=9\cdot4+9=45$

(Áp dụng Ví dụ 44c)

Bài tập 48.

$(2)\Rightarrow\sin2\beta=\frac{3}{2}\sin2\alpha$

$(1)\Rightarrow3\sin^2\alpha=1-2\sin^2\beta=\cos2\beta$

$\Rightarrow\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta$

$=3\cos\alpha\sin^2\alpha-\frac{3}{2}\sin2\alpha\sin\alpha=0$

$\Rightarrow\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$

Do $\alpha,\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\alpha+2\beta\in\left(0;\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow k=0$ (đpcm).

Bài tập 49.

Ta có : $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{2}=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{2}$ (*)

- $a\cos x+b\sin x=c\Leftrightarrow-a\cos x=b\sin x-c$

$\Rightarrow a^2\cos^2x=b^2\sin^2x+c^2-2bc\sin x$

$\Leftrightarrow a^2(1-\sin^2x)=b^2\sin^2x+c^2-2bc\sin x$

$\Leftrightarrow(a^2+b^2)\sin^2x-2bc\sin x+c^2-a^2=0$ (1)

Suy ra $\sin\alpha,\sin\beta$ là nghiệm của (1), theo định lí Viét :

Suy ra $\sin\alpha, \sin\beta$ là nghiệm của (1), theo định lí Viét :

$\sin\alpha \sin\beta = \dfrac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}$ (2)

Theo Ví dụ 41, ta có : $\cos\alpha \cos\beta = \dfrac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ (3)

Thế (2), (3) vào (*) ta được đpcm.

Bài tập 50.

Ta có : $\sin^3 x = \dfrac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ (*).

Áp dụng (*) cho từng số hạng của S, ta có :

$$\sin^3\frac{a}{3} = \frac{1}{4}\left(3\sin\frac{a}{3} - \sin a\right) \quad (1)$$

$$3\sin^3\frac{a}{3^2} = \frac{1}{4}\left(3^2\sin\frac{a}{3^2} - 3\sin\frac{a}{3}\right) \quad (2)$$

$$\ldots$$

$$3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n} = \frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{a}{3^n} - 3^{n-1}\sin\frac{a}{3^{n-1}}\right) \quad (n)$$

Cộng (1), (2), .., (n) theo vế , ta được : $S = \dfrac{1}{4}\left(-\sin a + 3^n\sin\dfrac{a}{3^n}\right)\cdot$

Bài tập 51.

a) Đặt $t = \tan x$, $VP = -\dfrac{1 - t^2}{t} + \dfrac{1}{t} = t = \tan x$ (đpcm).

b) Áp dụng câu a cho từng số hạng của S, ta có:

$$\frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} = -\cot a + \frac{1}{2}\cot\frac{a}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} = -\frac{1}{2}\cot\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\cot\frac{a}{2^2} \quad (2)$$

$$\ldots$$

$$\frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n} = -\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{a}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} \quad (n)$$

Cộng (1), (2), ..., (n) theo vế, ta được : $S = -\cot a + \dfrac{1}{2^n}\cot\dfrac{a}{2^n}\cdot$

Bài tập 52.

a) $VP = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} - 2\tan a = 2\tan a \cdot \left(\dfrac{1}{1 - \tan^2 a} - 1\right) = \tan^2 a \cdot \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

$= \tan^2 a \tan 2a = VT$

$\Rightarrow$ đpcm.

b) Áp dụng câu a cho từng số hạng của S, ta có:

$$\tan^2\frac{x}{2}\tan x = \tan x - 2\tan\frac{x}{2} \qquad (1)$$

$$2\tan^2\frac{x}{2^2}\tan\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2} - 2^2\tan\frac{x}{2^2} \qquad (2)$$

$$\ldots$$

$$2^{n-1}\tan^2\frac{x}{2^n}\cdot\tan\frac{x}{2^{n-1}} = 2^{n-1}\tan\frac{x}{2^{n-1}} - 2^n\tan\frac{x}{2^n} \qquad (n)$$

Cộng (1), (2), ..., (n) theo vế, ta được : $S = \tan x - 2^n\tan\frac{x}{2^n}\cdot$

Bài tập 53.

a) $VT = \dfrac{1+\cos 2a}{\cos 2a} = \dfrac{2\cos^2 a}{\cos^2 a - \sin^2 a} = \dfrac{2}{1-\tan^2 a}$

$$VP = \frac{\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}{\tan a} = \frac{2}{1-\tan^2 a} = VT.$$

b) Áp dụng câu a, tacó : $P = \dfrac{\tan x}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\tan 2x}{\tan x}\cdots\dfrac{\tan 2^{n-1}x}{\tan 2^{n-2}x} = \dfrac{\tan 2^{n-1}x}{\tan\frac{x}{2}}\cdot$

Bài tập 54.

a) $VP = \dfrac{2(2\cos^2 a - 1)+1}{2\cos a + 1} = \dfrac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a + 1} = 2\cos a - 1 = VT.$

b) Áp dụng câu a

$$VT = \frac{2\cos 2x+1}{2\cos x+1}\cdot\frac{2\cos 4x+1}{2\cos 2x+1}\cdots\frac{2\cos 2^n x+1}{2\cos 2^{n-1}x+1} = \frac{2\cos 2^n x+1}{2\cos x+1} = VP.$$

CHỦ ĐỀ 8 : CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

Bài tập 55.

a) $A = \sin(4\alpha+2\alpha)+\sin(4\alpha-2\alpha) = \sin 6\alpha + \sin 2\alpha.$

b) $B = \cos 8\alpha + \cos 2\alpha.$

c) $C = \cos[(3\alpha+2\beta)-(\alpha-\beta)] - \cos[(3\alpha+2\beta)+(\alpha-\beta)]$

$= \cos(2\alpha+3\beta) - \cos(4\alpha+\beta).$

d) $D = \dfrac{1}{2}\left[\sin\left(\dfrac{3x+y}{2}+\dfrac{3x-y}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{3x+y}{2}-\dfrac{3x-y}{2}\right)\right] = \dfrac{1}{2}(\sin 3x + \sin y).$

e) $E = 4(\sin 3\alpha\sin\alpha)\sin 2\alpha = 2(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha)\sin 2\alpha$

$= 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha\cos 4\alpha = \sin 4\alpha - [\sin 6\alpha + \sin(-2\alpha)]$

$= \sin 4\alpha - \sin 6\alpha + \sin 2\alpha.$

Bài tập 56.

a) $A = 2\cos\dfrac{x+\alpha+x}{2}\sin\dfrac{x+\alpha-x}{2} = 2\cos\left(x+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot$

b) $B = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2} = 2\sin\alpha\cos\beta.$

c) $C = 2\cos\dfrac{2x+y+x+2y}{2}\cos\dfrac{2x+y-x-2y}{2} = 2\cos\dfrac{3(x+y)}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}\cdot$

d) $D = 2\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right) = 2(\cos x+\cos 60^0) = 4\cos\dfrac{x+60^0}{2}\cos\dfrac{x-60^0}{2}\cdot$

e) $E = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} - \dfrac{1+\cos 2\beta}{2} = \dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = -\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$

f) $F = (\sin 3x+\sin x)+(\cos 3x+\cos x)+\sin 2x+\cos 2x$

$= 2\sin 2x\cos x + 2\cos 2x\cos x + \sin 2x + \cos 2x$

$= \sin 2x(2\cos x+1)+\cos 2x(2\cos x+1) = (2\cos x+1)(\sin 2x+\cos 2x)$

$= 2(\cos x+\cos 60^0)\left[\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 4\sqrt{2}\cos\dfrac{x+60^0}{2}\cos\dfrac{x-60^0}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot$

g) $G = [\sin\alpha+\sin(\alpha+2\beta)]+\sin(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)$

$= 2\sin(\alpha+\beta)(\cos\beta+\cos 60^0)$

$= 4\sin(\alpha+\beta)\cos\left(\dfrac{\beta+60^0}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\beta-60^0}{2}\right)\cdot$

h) $H = 2\cos(a+b)\cos(a-b)+2\cos(a+b)\sin(a+b)$

$= 2\cos(a+b)\left\{\cos(a-b)+\cos[90^0-(a+b)]\right\}$

$= 4\cos(a+b)\cos\dfrac{a-b+90^0-(a+b)}{2}\cos\dfrac{90^0-(a+b)-(a-b)}{2}$

$= 4\cos(a+b)\cos(45^0-b)\cos(45^0-a).$

k) $K = 2\sin\dfrac{x}{2}\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right) = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot$

Bài tập 57.

a) Gọi $M = \sin A - \sin B - \sin C$

Ta có: $M = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} - 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$= 2\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} - 2\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}$

$= 2\sin\dfrac{C}{2}\left(\sin\dfrac{A-B}{2} - \sin\dfrac{A+B}{2}\right)$

$= 2\sin\dfrac{C}{2}\left[2\cos\dfrac{A}{2}\sin\left(-\dfrac{B}{2}\right)\right] = -4\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cdot$

b) Gọi $N = \cos A + \cos B - \cos C + 1$

$$\text{Ta có}: N = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cdot$$

Bài tập 58.

a) $A = \frac{1}{2}[\cos(50^0 + 10^0) + \cos(50^0 - 10^0)]\cos 70^0$

$$= \frac{1}{4}\cos 70^0 + \frac{1}{2}\cos 70^0\cos 40^0 = \frac{1}{4}\cos 70^0 + \frac{1}{4}(\cos 110^0 + \cos 30^0)$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 110^0 + \frac{1}{4}\cos 110^0 + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot$$

b) $B = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$

$$= \frac{\sin\frac{2\pi}{7} - \left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{-\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2} \quad \left(\text{do } \sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7}\right)\cdot$$

c) $C = \dfrac{\tan 80^0}{\dfrac{\sin 100^0}{\cos 75^0\cos 25^0}} - \dfrac{\cot 10^0}{\dfrac{\sin 100^0}{\sin 75^0\sin 25^0}}$

$$= \frac{\cot 10^0}{\sin 100^0}(\cos 75^0\cos 25^0 - \sin 75^0\sin 25^0) = \frac{\cos 100^0}{\sin 100^0}\cdot\cot 10^0$$

$$= \cot(90^0 + 10^0)\cot 10^0$$

$$= -\tan 10^0\cot 10^0 = -1.$$

d) $D = (\tan 9^0 + \cot 9^0) - (\tan 27^0 + \cot 27^0) + (\tan 15^0 + \cot 15^0)$

$$= \frac{1}{\sin 9^0\cos 9^0} - \frac{1}{\sin 27^0\cos 27^0} + \frac{1}{\sin 15^0\cos 15^0}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sin 18^0} - \frac{1}{\sin 54^0}\right) + \frac{2}{\sin 30^0} = 2\left(\frac{\sin 54^0 - \sin 18^0}{\sin 54^0\sin 18^0}\right) + 4$$

$$= \frac{4\cos 36^0\sin 18^0}{\sin 54^0\sin 18^0} + 4 = \frac{4\sin 54^0}{\sin 54^0} + 4 = 8.$$

e) $E = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\left[2\cos^2\dfrac{\pi}{7} - \dfrac{1}{2} - \left(4\cos^3\dfrac{\pi}{7} - 3\cos\dfrac{\pi}{7}\right)\right]$

$= \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\left(1 + \cos\dfrac{2\pi}{7} - \dfrac{1}{2} - \cos\dfrac{3\pi}{7}\right) = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\left(\dfrac{1}{2} + \cos\dfrac{2\pi}{7} - \cos\dfrac{3\pi}{7}\right)$

Ta có: $\left(2\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{7}\right).E = \sin\dfrac{\pi}{7} + 2\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7} - 2\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{3\pi}{7}$

$= \sin\dfrac{\pi}{7} + \sin\dfrac{3\pi}{7} - \sin\dfrac{\pi}{7} - \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{2\pi}{7} = \sin\dfrac{2\pi}{7}\left(\text{do } \sin\dfrac{4\pi}{7} = \sin\dfrac{3\pi}{7}\right)$

$\Rightarrow E = 1.$

f) $F = 2\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{15} - 2\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{\pi}{5} = 2\cos\dfrac{\pi}{5}\left(\cos\dfrac{\pi}{15} - \cos\dfrac{4\pi}{15}\right)$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{5}\left[-2\sin\dfrac{\pi}{6}\sin\left(-\dfrac{\pi}{10}\right)\right] = 2\cos\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{5}\left(2\sin\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{10}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{10}}$

$= \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{\pi}{5}}{\cos\dfrac{\pi}{10}} = \dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{5}}{2\cos\dfrac{\pi}{10}} = \dfrac{1}{2}\ \left(\text{do} \cos\dfrac{\pi}{10} = \sin\dfrac{2\pi}{5}\right)\cdot$

Bài tập 59.

a) $VT = (\sin3\alpha + \sin\alpha) - \sin2\alpha = 2\sin2\alpha\cos\alpha - \sin2\alpha$

$= 2\cos\alpha(\sin2\alpha - \sin\alpha) = 4\cos\alpha\cos\dfrac{3\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$ (đpcm).

b) $VT = [\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha].[\sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha] - \sin^2\beta$

$= \left[2\cos\left(\alpha + \dfrac{\beta}{2}\right)\sin\dfrac{\beta}{2}\right]\cdot\left[2\sin\left(\alpha + \dfrac{\beta}{2}\right)\cos\dfrac{\beta}{2}\right] - \sin^2\beta$

$= \sin\beta\sin(2\alpha+\beta) - \sin^2\beta = \sin\beta[\sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta]$

$= 2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$ (đpcm).

c) $VT = 2\sin4\alpha\cos\alpha - 2\sin2\alpha\cos\alpha = 2\cos\alpha(\sin4\alpha - \sin2\alpha)$

$= 4\cos\alpha\cos3\alpha\sin\alpha = 2\sin2\alpha\cos3\alpha$ (đpcm).

d) $VT = (1 + \cos2x) + (\cos6x + \cos4x) = 2\cos^2x + 2\cos5x\cos x$

$= 2\cos x(\cos5x + \cos x) = 4\cos x\cos3x\cos2x$ (đpcm).

e) $VT = \dfrac{1}{2}\sin x\left(\cos2x - \cos\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\sin x\cos2x + \dfrac{1}{4}\sin x$

$= \dfrac{1}{4}[\sin3x + \sin(-x)] + \dfrac{1}{4}\sin x = \dfrac{1}{4}\sin3x$ (đpcm).

f) $VT=\frac{1}{2}(\cos8x+\cos4x)+\frac{1}{2}(\cos2x-\cos8x)=\frac{1}{2}(\cos4x+\cos2x)$

$=\cos3x\cos x$ (đpcm).

g) $VT=\frac{1-\cos(\alpha+\beta-\gamma)}{2}+\frac{1-\cos(\alpha+\gamma-\beta)}{2}+[\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha]\cos\alpha$

$=1-\cos^2\alpha-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\gamma-\beta)]+\cos(\beta-\gamma)\cos\alpha$

$=\sin^2\alpha-\cos(\beta-\gamma)\cos\alpha+\cos(\beta-\gamma)\cos\alpha=\sin^2\alpha$ (đpcm).

h) $VT=\cos10x+1+\cos8x+6\cos3x\cos x-\cos x$

$-2\cos x(3\cos3x+\cos9x)$

$=\cos10x+1+\cos8x-\cos x-2\cos9x\cos x$

$=\cos10x+1+\cos8x-\cos x-(\cos10x+\cos8x)=1-\cos x$ (đpcm).

Bài tập 60.

a) $VP=1+8\sin10^0+16\sin^2 10^0=1+8\sin10^0+8(1-\cos20^0)$

$=9+8(\sin10^0-\cos20^0)=9+8(\sin10^0-\sin70^0)$

$=9+16\cos40^0\sin(-30^0)=9-8\sin50^0$ (đpcm).

b) $VT=(\tan30^0+\tan60^0)+(\tan40^0+\tan50^0)$

$=\frac{\sin90^0}{\cos30^0\cos60^0}+\frac{\sin90^0}{\cos40^0\cos50^0}$

$=\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\cos90^0+\cos10^0}=\frac{4\cos10^0+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos10^0}$

$=\frac{4(\cos10^0+\cos30^0)}{\sqrt{3}\cos10^0}=\frac{8\cos20^0\cos10^0}{\sqrt{3}\cos10^0}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\cos20^0$ (đpcm).

c) $VP=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{2\sin\frac{5\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14}}\left(\text{do } \frac{3\pi}{7}+\frac{\pi}{14}=\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{2\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\ \left(\text{do } \frac{\pi}{7}+\frac{5\pi}{14}=\frac{\pi}{2}\right)$ (đpcm).

Bài tập 61.

a) $VT=\frac{-2\sin\left[\frac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2}\right]\sin\left[\frac{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{2}\right]}{2\cos\left[\frac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2}\right]\sin\left[\frac{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{2}\right]}$

$=\frac{-2\sin\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\sin\beta}=-\tan\alpha$ (đpcm).

c) $VT = (\tan a - \tan b) + (\tan b - \tan c) + (\tan c - \tan a) = 0$ (đpcm).

d) • Gọi $A = \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$, ta có:

$$A = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\cos\frac{a+b+2c}{2}\sin\left[-\frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b+2c}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\left(-2\sin\frac{\frac{a-b}{2}+\frac{a+b+2c}{2}}{2}\sin\frac{\frac{a-b}{2}-\frac{a+b+2c}{2}}{2}\right)$$

$$= -4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\left[-\frac{(b+c)}{2}\right] = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}$$

• $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+c}{2}\cos\frac{b+c}{2}$

$\Rightarrow VT = \tan\frac{a+b}{2}\tan\frac{b+c}{2}\tan\frac{c+a}{2}$ (đpcm).

Bài tập 62.

a) $A = \dfrac{1-\cos 2x}{2} + \dfrac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)}{2} + \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right) - \cos\frac{\pi}{3}\right]$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right) + \cos 2x\right] + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right) - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right) = \frac{3}{4} \text{ (đpcm).}$$

b) $B = \dfrac{1+\cos 2x}{2} + \dfrac{1-\cos(2a+2x)}{2} - 2\sin a\cos x\sin(a+x)$

$$= 1 + \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos(2a+2x)] - 2\sin a\cos x\sin(a+x)$$

$$= 1 + \sin(a+2x)\sin a - 2\sin a\cos x\sin(a+x)$$

$$= 1 + \sin a[\sin(a+2x) - \sin(a+2x) - \sin a] = 1 - \sin^2 a = \cos^2 a \text{ (đpcm).}$$

c) $C = \cos^2(x-\alpha) + \sin^2(x-\beta) - 2\cos(x-\alpha)\sin(x-\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$$= \frac{1+\cos(2x-2\alpha)}{2} + \frac{1-\cos(2x-2\beta)}{2} - 2\cos(x-\alpha)\sin(x-\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}[\cos(2x-2\alpha) - \cos(2x-2\beta)] - 2\cos(x-\alpha)\sin(x-\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$= 1 - \sin(2x-\alpha-\beta).\sin(\beta-\alpha) - 2\cos(x-\alpha)\sin(x-\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$= 1 + \sin(\alpha-\beta)[\sin(2x-\alpha-\beta) - 2\cos(x-\alpha)\sin(x-\beta)]$$

$$= 1 + \sin(\alpha-\beta)[\sin(2x-\alpha-\beta) - \sin(2x-\alpha-\beta) - \sin(\alpha-\beta)] = \cos^2(\alpha-\beta).$$

d) $D=\tan2\alpha\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$

$$=\tan2\alpha\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}+\frac{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right]}{\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$$

$$=\frac{\sin2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\sin2\alpha}{\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\cos\frac{\pi}{6}\right]}=\frac{\sin2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}}=1\ \text{(đpcm).}$$

Bài tập 63.

$$VT=\frac{\sin\frac{\varphi+a}{2}\sin\frac{\varphi-a}{2}}{\cos\frac{\varphi+a}{2}\cos\frac{\varphi-a}{2}}=\frac{\cos a-\cos\varphi}{\cos a+\cos\varphi}=\frac{\cos a(1-\cos b)}{\cos a(1+\cos b)}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{b}{2}}{2\cos^2\frac{b}{2}}=\tan^2\frac{b}{2}\ \text{(do } \cos\varphi=\cos a\cos b\text{) (đpcm).}$$

Bài tập 64.

$$VP=\frac{\frac{aA+bB}{bB}}{\frac{aB+bA}{bB}}=\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{A}{B}+1}{\frac{a}{b}+\frac{A}{B}}=\frac{\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)}\cdot\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}+1}{\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)}+\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}}$$

$$=\frac{\sin(x-\alpha)\cos(x-\alpha)+\sin(x-\beta)\cos(x-\beta)}{\sin(x-\alpha)\cos(x-\beta)+\sin(x-\beta)\cos(x-\alpha)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}[\sin(2x-2\alpha)+\sin(2x-2\beta)]}{\sin[2x-(\alpha+\beta)]}=\frac{\sin[2x-(\alpha+\beta)]\cos(\beta-\alpha)}{\sin[2x-(\alpha+\beta)]}$$

$=\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha-\beta)$ (đpcm).

Bài tập 65.

- $ab=(\cos x+\cos y)(\sin x+\sin y)$

  $=(\sin x\cos y+\cos x\sin y)+(\sin x\cos x+\sin y\cos y)$

  $=\sin(x+y)+\frac{1}{2}(\sin2x+\sin2y)$

  $=[1+\cos(x-y)]\sin(x+y)\quad(1)$

- $a^2+b^2=(\cos^2x+\sin^2x)+(\cos^2y+\sin^2y)+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$

  $=2+2\cos(x-y)$

$\Rightarrow \cos(x-y) = \frac{1}{2}(a^2+b^2-2) \quad (2)$

Thế (2) vào (1) ta được : $ab = \left[1+\frac{1}{2}(a^2+b^2-2)\right]\sin(x+y)$

Do đó $\sin(x+y) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.