Phần I.

CÁC CHỦ ĐỀ THƯỜNG GẶP

Chủ đề 1. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN CĂN THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. + Với số dương $a, \sqrt{a}$ được gọi là **căn bậc hai số học** của a.

+ $\sqrt{a}$ có nghĩa khi $a \ge 0$ (a lấy giá trị không âm).

2. Ta viết $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = a \end{cases}$; $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & khi \ \ a \ge 0 \\ -a & khi \ \ a < 0. \end{cases}$

3. + $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, với $a \ge 0; b \ge 0$.

+ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ với $a \ge 0; b > 0$.

5. $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$, với $b \ge 0$.

6. $\dfrac{c}{\sqrt{a} \pm b} = \dfrac{c\left(\sqrt{a} \mp b\right)}{a - b^2}$ với $a \ge 0; a \ne b^2$.

7. $\dfrac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \dfrac{c\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)}{a - b}$ với $a \ge 0, b \ge 0; a \ne b$.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1. Với giá trị nào của x thì các biểu thức sau có nghĩa?

a) $\sqrt{x + 2022}$. **b)** $\sqrt{2022 - 2x}$. **c)** $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

d) $\sqrt{3x - 5} + \sqrt{4 - x}$. **e)** $\sqrt{x^2 - 3}$. **f)** $\sqrt{x^2 + x - 6}$.

Giải

CẦN NHỚ

$\sqrt{a}$ có nghĩa khi $a \ge 0$.

a) $\sqrt{x + 2022}$ có nghĩa khi $x + 2022 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -2022$.

b) $\sqrt{2022 - 2x}$ có nghĩa khi $2022 - 2x \ge 0 \Leftrightarrow -2x \ge -2022 \Leftrightarrow x \le 1011$.

c) $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ có nghĩa khi $x^2 - 6x + 9 \ge 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \ge 0$ với mọi x.

d) $\sqrt{3x - 5} + \sqrt{4 - x}$ có nghĩa khi $\begin{cases} 3x - 5 \ge 0 \\ 4 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \ge 5 \\ -x \ge -4 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} \le x \le 4$.

e) $\sqrt{x^2 - 3}$ có nghĩa khi $x^2 - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge 3 \Leftrightarrow |x| \ge \sqrt{3}$.

f) $\sqrt{x^2 + x - 6}$ có nghĩa khi $x^2 + x - 6 \ge 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) \ge 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ x + 3 \ge 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x - 2 \le 0 \\ x + 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x \ge -3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \le 2 \\ x \le -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$ hay $x \le -3$.

Bài 2. Thu gọn các biểu thức

a) $A = \dfrac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{12 - 8\sqrt{2}}} + \dfrac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{12 + 8\sqrt{2}}}$. **b)** $B = \dfrac{\left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)\left(6 - 2\sqrt{5}\right)\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}$.

Giải

a) Ta có $A=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}{\sqrt{\left(2-2\sqrt{2}\right)^2}}+\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}{\sqrt{\left(2+2\sqrt{2}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-2}+\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}+\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=1.$

b) • $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)\left(6-2\sqrt{5}\right)\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(6-2\sqrt{5}\right)\sqrt{3+\sqrt{5}}$

$=\left(\sqrt{5}+1\right)\left(6-2\sqrt{5}\right)\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\left(\sqrt{5}+1\right)\left(6-2\sqrt{5}\right)\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}$

$=\left(\sqrt{5}+1\right)^2\left(6-2\sqrt{5}\right)=\left(6+2\sqrt{5}\right)\left(6-2\sqrt{5}\right)=36-20=16.$

• $\sqrt{2-\sqrt{3}}.\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2-\sqrt{3}}.\sqrt{2}.\left(\sqrt{3}+1\right)=\sqrt{4-2\sqrt{3}}.\left(\sqrt{3}+1\right)$

$=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}.\left(\sqrt{3}+1\right)=\left(\sqrt{3}-1\right).\left(\sqrt{3}+1\right)=\sqrt{3^2}-1^2=2.$

Từ đó có $B=8.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Nhằm giúp học sinh nắm vững thêm kiến thức phần nội dung trên, chúng tôi đề xuất thêm một số bài tập ở bên để các em rèn thêm.

Bài 1: Thu gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}}.$

Đáp số. $A=2.$

Bài 2: Thu gọn biểu thức $B=3\sqrt{13+4\sqrt{3}}+2\sqrt{37-20\sqrt{3}}-2\sqrt{3}.$

Đáp số. $B=13.$

Bài 3: Thu gọn biểu thức $C=\sqrt{8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}}.$

Đáp số. $C=1+\sqrt{2}+\sqrt{5}.$

Bài 4: Thu gọn biểu thức $D=\dfrac{\sqrt{12+6\sqrt{2}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{28+10\sqrt{3}}-\sqrt{28-10\sqrt{3}}}.$

Đáp số. $D=1.$

Bài 5: Cho $E=\sqrt{4+\sqrt{12+2\sqrt{3}}}+\sqrt{4-\sqrt{12+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh $E=\sqrt{6+2\sqrt{3}}.$

Bài 6: Tìm điều kiện của x để $F=\dfrac{\sqrt{\left(x+2\right)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$ xác định.

Đáp số. $x>0$ và $x\neq 2.$

Bài 7: Tìm điều kiện của x để $G=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+1-\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ xác định.

Đáp số. $x>0.$

Bài 3. Cho biểu thức $C=\left(\dfrac{2x+1}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(1-\dfrac{x+4}{x+\sqrt{x}+1}\right)$

(với $x\geq 0;\ x\neq 1;\ x\neq 9$)

a) Rút gọn C.

b) Tìm x nguyên để C nhận giá trị nguyên.

Giải

a) Ta có $C=\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\dfrac{x+\sqrt{x}+1-x-4}{x+\sqrt{x}+1}\right)$

$$= \frac{2x+1-\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}.$$

b) Ta có $C = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{\left(\sqrt{x}-3\right)+3}{\sqrt{x}-3} = 1+\frac{3}{\sqrt{x}-3}$

Để C nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x}-3$ là ước của 3 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-3=\pm 1\\ \sqrt{x}-3=\pm 3\end{array}\right.$

$\Rightarrow x \in \{0;4;16;36\}$ (thỏa mãn điều kiện).

Nhận xét: Câu a) các em có thể giải bằng cách khác

Đặt $a=\sqrt{x} \Rightarrow x=a^2$. Khi đó:

$$C = \left(\frac{2a^2+1}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}\right):\left(1-\frac{a^2+4}{a^2+a+1}\right) = \frac{2a^2+1-a^2-a-1}{(a-1)\left(a^2+a+1\right)} \cdot \frac{a^2+a+1}{a-3}$$

$$= \frac{a(a-1)}{a-1} \cdot \frac{1}{a-3} = \frac{a}{a-3} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}.$$

Bài 4. Cho biểu thức $D = \frac{2}{(x+1)\sqrt{x+1}+(x-1)\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\frac{2x}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}$ với $x>1$.

a) Rút gọn D. **b)** Tìm x để $D = x-1$.

Giải

a) Ta có

$$D = \frac{2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(x+1-\sqrt{x+1}.\sqrt{x-1}+x-1\right)} \cdot \frac{2x\sqrt{x+1}-(x+1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(2x-\sqrt{x+1}.\sqrt{x-1}\right)} \cdot \frac{\sqrt{x+1}\left(2x-\sqrt{x+1}.\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)} = \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1-(x-1)} = \sqrt{x+1}.$$

b) Để $D = x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \ge 1\\ x+1=(x-1)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \ge 1\\ x^2-3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=3.$

Bài 5. Cho biểu thức $E = \frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+1-\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x>0$.

a) Rút gọn E. **b)** Xác định x để E có giá trị nhỏ nhất.

Giải

a) Ta có $E = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x^3}+1\right)}{x-\sqrt{x}+1}+1-\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)+1-\left(2\sqrt{x}+1\right)$

$$= \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right).$$

b) Với $x>0$ ta có $E = \left(\sqrt{x^2}-2.\sqrt{x}.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4} = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \ge -\frac{1}{4}.$

Cho nên giá trị nhỏ nhất của E là $-\frac{1}{4}$ khi $\sqrt{x}-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$.

Bài 6. Cho biểu thức $F=\dfrac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}$ với $a>0,b>0,$ $a\neq b.$ Chứng minh giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào a và b.

Giải

Đặt $\begin{cases}x=\sqrt{a}\\ y=\sqrt{b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=x^2\\ b=y^2\end{cases}$. Khi đó

$$F=\frac{\left(\dfrac{x^2-y^2}{x+y}\right)^3+2x^3+y^3}{3x^4+3xy^3}+\frac{xy-x^2}{x^3-y^2x}=\frac{\left(x-y\right)^3+2x^3+y^3}{3x\left(x^3+y^3\right)}+\frac{x\left(y-x\right)}{x\left(x^2-y^2\right)}$$

$$=\frac{3x\left(x^2-xy+y^2\right)}{3x\left(x^3+y^3\right)}-\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x+y}=0.$$

Vậy giá trị của biểu thức đã cho không phụ thuộc vào a và b.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Nhằm giúp học sinh nắm vững thêm kiến thức phần nội dung trên, chúng tôi đề xuất thêm một số bài tập ở bên để các em rèn thêm.

Bài 8: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

a) Rút gọn A. **b)** Tìm các giá trị của x để $A>0$.

Đáp số. a) $A=\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$. **b)** $0<x<1$.

Bài 9: Cho $B=\left(\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right):\left(a-b\right)-\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với $a>0,b>0,a\neq b.$

Chứng minh giá trị của biểu thức trên không phụ thuộc vào a và b.

Bài 10: Cho biểu thức $C=\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

a) Tìm điều kiện và rút gọn biểu thức C. **b)** Tìm x để $\dfrac{1}{C}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}=1$.

Đáp số. a) $0<x\neq 1, A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$. **b)** $x=9$.

Bài 11: Cho $D=\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right]:\dfrac{\sqrt{x^3}+y\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}}$,

với $x>0,y>0$.

a) Rút gọn D. **b)** Cho $xy=16$. Xác định x,y để D có giá trị nhỏ nhất.

Đáp số. a) $A=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$. **b)** $x=y=4$.

Bài 12: Cho biểu thức $E=\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}}+\dfrac{x+8}{10-x}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$.

a) Rút gọn E. **b)** Tính giá trị của E khi $x=\sqrt[4]{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$.

Đáp số. a) $E=-\dfrac{3\sqrt{x-1}}{2\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$. **b)** $E=-\dfrac{1}{2}$.